

Chapitre 4 - Graphes d'ordonnement

1 Méthode MPM

Définition :

La réalisation d'un projet passe souvent par l'exécution de différentes tâches. Certaines de ces tâches peuvent être réalisées simultanément, mais d'autres nécessitent d'être réalisées dans un ordre précis. Faire l'ordonnement d'un projet consiste à organiser ce projet en respectant les contraintes d'antériorité des tâches, tout en minimisant la durée totale de réalisation.

Remarque :

Le programme de BTS donne le choix entre deux méthodes d'ordonnement : la méthode PERT et la méthode MPM. La méthode présentée ici est la méthode MPM (Méthode des Potentiels Métra).

Méthode :

Pour construire un graphe d'ordonnement, on effectue les étapes suivantes :

1. On commence par déterminer le niveau de chaque tâche dans le graphe (voir chapitre 3).
2. On représente le projet par un graphe pondéré, dans lequel :
 - chaque tâche est représentée par un sommet,
 - les sommets sont alignés verticalement par niveau,
 - les arcs représentent les contraintes d'antériorité (un arc va de i à j si il est nécessaire d'avoir fait i pour faire j),
 - la valeur de chaque arc est la durée de la tâche à l'origine de l'arc,
 - deux sommets (ne correspondant pas à des tâches) sont placés aux extrémités du graphe : Début et Fin).

Exemple :

La construction d'un entrepôt peut être décomposée de la façon suivante :

Tâche	Tâches immédiatement antérieures	Durée en jours
A - Acceptation des plans	-	4
B - Préparation du terrain	-	2
C - Commande de matériaux	A	1
D - Creusage des fondations	A, B	1
E - Commande des portes et fenêtres	A	2
F - Livraison des matériaux	C	2
G - Coulage des fondations	D, F	2
H - Livraison des portes et fenêtres	E	8
I - Murs, charpente, toit	G	4
J - Mise en place des portes et fenêtres	H, I	1

2 Dates au plus tôt et au plus tard

Définition :

La date de début au plus tôt d'une tâche est la date minimale à laquelle on peut commencer une tâche, car toutes les tâches antérieures sont terminées.

Remarque :

Si on note $t(i)$ la date de début au plus tôt de la tâche i , et $d(i)$ la durée de la tâche i , on a :

$$t(j) = \max(t(i) + d(i)) \quad \text{pour } i \text{ parcourant l'ensemble des prédécesseurs de } j.$$

Exemple (suite) :

Remarque :

La date au plus tôt du sommet Fin est la durée totale du projet.

Définition :

La date de début au plus tard d'une tâche est la date maximale à laquelle on peut commencer une tâche sans que cela repousse la fin du projet. (Déterminer les dates au plus tard nécessite donc de lire le graphe en partant de la fin.)

Remarque :

Si on note $T(i)$ la date de début au plus tard de la tâche i , et $d(i)$ la durée de la tâche i , on a :

$$T(j) = \min(T(k) - d(j)) \quad \text{pour } k \text{ parcourant l'ensemble des successeurs de } j.$$

Exemple (suite) :

Remarque :

Lorsqu'on trace un diagramme d'ordonnancement, on ajoute pour chaque tâche sa date de début au plus tôt et sa date de début au plus tard.

On peut également ajouter la date de fin au plus tôt et la date de fin au plus tard, mais cela n'est pas l'usage à l'épreuve de mathématiques du BTS SIO.

Exemple (suite) :

Définitions :

- On appelle tâche critique une tâche dont les dates au plus tôt et au plus tard sont les mêmes. Elles ne tolèrent aucun retard.
- Un chemin critique est un chemin reliant le début à la fin, et qui n'est constitué que de tâches critiques.

Exemple (suite) :

3 Marges

Définitions :

- La marge totale d'une tâche est le retard maximum que l'on peut accepter sur le début de la tâche sans que cela retarde la date de fin du projet.
Elle est obtenue en faisant : date au plus tard - date au plus tôt.
- La marge libre d'une tâche est le retard maximum que l'on peut accepter sur la date de début au plus tôt de la tâche sans que cela ne retarde la date de début au plus tôt des successeurs de la tâche.
Elle est obtenue en faisant : $\min(\text{dates au plus tôt suivantes}) - \text{durée de la tâche} - \text{date au plus tôt de la tâche}$.

Exemple (suite) :

Sommet										
Marge totale										
Marge libre										

Remarques :

- La marge totale est toujours supérieure ou égale à la marge libre.
- On peut faire apparaître sur le graphe d'ordonnement les marges, mais ce n'est pas l'usage à l'épreuve de mathématiques de BTS SIO.

4 Exercices

Exercice 1 :

Un projet nécessite la réalisation de sept tâches, avec les contraintes d'antériorité décrites ci-dessous :

Tâche	A	B	C	D	E	F	G
Durée (en jours)	6	3	6	2	4	3	1
Tâches antérieures				B	B	A, D	C, E, F

- 1) Déterminer le niveau de chacune des tâches.
- 2) Construire le graphe d'ordonnement du projet, en incluant les dates au plus tôt et au plus tard de chaque tâche.
- 3) Déterminer le chemin critique.
- 4) Quelle est la durée minimale de réalisation du projet ?
- 5) Calculer les marges totales et libres de chaque sommet. Interpréter ces valeurs.

Exercice 2 :

Un projet est constitué de 8 tâches soumises aux contraintes suivantes :

Tâche	A	B	C	D	E	F	G	H
Durée (en jours)	3	5	6	2	6	7	10	4
Tâches antérieures			A	A, B	C	C	C, D	E, F, G

- 1) Déterminer le niveau de chacune des tâches.
- 2) Construire le graphe d'ordonnement du projet, en incluant les dates au plus tôt et au plus tard de chaque tâche.
- 3) Déterminer le chemin critique et la durée minimale de réalisation du projet.
- 4) Calculer la marge totale et la marge libre de D et de E.
- 5) Après vérifications, une nouvelle contrainte doit être prise en compte : il faut attendre trois jours après la fin de E pour commencer H.
Ce retard entraîne-t-il des modifications des dates au plus tôt et de la durée minimale du projet ?
- 6) Même question si la durée de D doit être rallongée de 3 jours.

Exercice 3 (Met2015) :

Une société de services et d'ingénierie informatiques planifie la mise en place d'un nouveau système d'information interne dans une entreprise. Les tâches nécessaires à la réalisation de ce projet sont répertoriées dans le tableau suivant.

Tâche à réaliser	Repère	Durée en jours	Tâche(s) précédente(s)	Nombre d'intervenants nécessaires
Établissement du cahier des charges	A	2		2
Rédaction du cahier technique	B	2	A	2
Définition des droits d'accès	C	1	B	1
Choix, achat du matériel	D	4	B	3
Installation du matériel	E	1	D	2
Formation des responsables techniques	F	2	C, D	1
Installation et paramétrage du système	G	2	C, E	2
Réduction de la notice et information des salariés	H	1	F, G	2

On souhaite ordonner la réalisation de ces tâches de façon à ce que le nouveau système soit fonctionnel le plus tôt possible. Pour cela, on considère le graphe orienté correspondant aux conditions d'antériorité données par le tableau précédent.

- Déterminer le niveau de chacun des sommets de ce graphe.
- Donner le tableau des successeurs de chaque sommet.
- Construire le graphe d'ordonnancement du projet (selon la méthode P. E. R. T. ou M. P. M.). Déterminer pour chaque tâche les dates au plus tôt et au plus tard. En déduire le chemin critique et la durée minimale de réalisation du projet.
- Pour des questions de gestion du personnel, la société de services et d'ingénierie informatiques ne souhaite pas mobiliser plus de trois intervenants par jour. Peut-on planifier les tâches avec cette contrainte sans modifier la durée totale du projet ?

Exercice 4 (Met2016) :

La planification d'un projet de création d'un robot requiert les sept tâches listées ci-dessous.

Description de la tâche	Tâche	Durée (en jour)	Prédécesseurs
Achat de la structure	A	1	-
Modélisation numérique	B	5	A
Montage de la maquette	C	1	A, D
Achat des capteurs	D	3	-
Développement du programme	E	1	D
Test du programme sur la maquette et ajustements	F	4	C, E
Négociation des frais de fabrication	G	1	B, F

- Déterminer le niveau de chacun des sommets.
- Donner le tableau des successeurs de chaque sommet.
- Construire le graphe d'ordonnancement du projet (méthode M. P. M. ou P. E. R. T.) en incluant les dates au plus tôt et au plus tard.
- Donner un chemin critique et la durée minimale du projet.
- Calculer la marge libre et la marge totale de la tâche A.
- La tâche A commence avec un jour de retard.
 - Ce retard aura-t-il une incidence sur le début des tâches suivantes ? Justifier.
 - Ce retard aura-t-il une incidence sur la date de fin du projet ? Justifier.