

Dérivation de la frontière efficiente (FE) en présence de N titresMéthode du multiplicateur de Lagrange (Louis Lagrange : 1736-1813)

FE = ensemble des placements qui maximisent le rendement espéré pour un risque donné
 = ensemble des placements qui minimisent le risque pour un rendement espéré donné

Formulation mathématique selon la 1^{ère} définition

$$\underset{w_i}{\text{Max}} E(R_p) = \sum_{i=1}^N w_i E(R_i)$$

sous les contraintes:

$$\begin{array}{c} \text{Risque cible} \\ \uparrow\uparrow \\ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j \sigma_{ij} - \sigma_p^* = 0 \end{array} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^N w_i - 1 = 0$$

Formulation mathématique selon la 2^e définition

$$\underset{w_i}{\text{Min}} s_p^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j s_{ij}$$

$$\begin{array}{ccc} \text{Sous les contraintes :} & \begin{array}{c} \text{Rendement cible} \\ \uparrow\uparrow \\ (1) \quad E(r_p) = E(r_p^*) \end{array} & \text{ou} \quad \sum_{i=1}^N w_i E(r_i) - E(r_p^*) = 0 \\ & \begin{array}{c} (2) \quad \sum_{i=1}^N w_i = 1 \end{array} & \text{ou} \quad \sum_{i=1}^N w_i - 1 = 0 \end{array}$$

Fonction objective L

$$L = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j s_{ij} + I_1 \left[\sum_{i=1}^N w_i E(r_i) - E(r_p^*) \right] + I_2 \left[\sum_{i=1}^N w_i - 1 \right]$$

→ Annulation des dérivées partielles de L par rapport aux w_i , à λ_1 et à λ_2 .

$$\begin{array}{l} \text{N équations} \quad \left[\frac{\partial L}{\partial w_i} = 2w_i s_i^2 + 2w_j s_{ij} + \dots + 2w_N s_{iN} + I_1 E(R_i) + I_2 = 0 \right. \\ \quad \left. \frac{\partial L}{\partial I_1} = w_1 E(R_1) + w_2 E(R_2) + \dots + w_N E(R_N) - E(R_p^*) = 0 \right. \end{array} \quad i \neq j$$

$$\frac{\partial L}{\partial w_2} = w_1 + w_2 + \dots + w_N - 1 = 0$$

On a ainsi $N + 2$ équations à $N + 2$ inconnues \rightarrow solution.

En faisant varier $E(r_p^*)$, on dérive peu à peu la FE.

Les poids obtenus peuvent tous s'écrire :

$$\left. \begin{array}{l} w_1 = c_1 + d_1 E(R_p^*) \\ w_2 = c_2 + d_2 E(R_p^*) \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ w_N = c_N + d_N E(R_p^*) \end{array} \right\} \text{ Les } c_i \text{ et } d_i \text{ sont } \underline{\text{constants}}.$$

Inconvénient de la méthode du Lagrangien

On ne peut inclure la contrainte d'interdiction des ventes à découvert (du type Kuhn-Tucker). Or, cette contrainte est souvent nécessaire pour des raisons légales, ou simplement parce que les investisseurs ne voudront pas prendre des positions trop spéculatives.

La procédure de choix de portefeuille est par la suite identique au cas de 2 titres risqués :

- 1) Détermination du portefeuille de tangence.
- 2) Détermination des proportions dans le portefeuille de tangence (les actifs risqués) et dans le titre sans risque.