1 Multiplicateurs de Lagrange

On veut minimiser une fonction sous contrainte. On part d'un espace V de dimension n sur $\mathbb{R}$. On restrient l'espace de recherche, par contrainte, à un convexe. L'existence et l'unicitié de la solution du problème restent identique à celle qui existent sur V, voire sont meilleures si le convexe est borné et V n'est pas strictement convexe.

Le problème se pose ainsi :

$$\begin{aligned} f &: V \to \mathbb{R} && (1) \\ \mathcal{C} &= \{X \in V | \forall i \in \{1, ..., p\}, g_i(X) = 0\} && (2) \\ \bar{x} &= \arg\min_{X \in \mathcal{C}} f(X) && (3) \end{aligned}$$

On suppose que la définition de $\mathcal{C}$ lui donne une structure convexe :

$$\forall (X, Y) \in \mathcal{C}^2, \forall \theta \in \mathbb{R}, \theta X + (1 - \theta) Y \in \mathcal{C} \quad (4)$$

On appelle opérateur de Lagrange ceci :

$$\mathcal{L}_f \quad : \quad \mathcal{C} \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R} \tag{5}$$

$$\Lambda \quad = \quad (\lambda_i)_{i \in \{1,\ldots,p\}} \in \mathbb{R}^p \tag{6}$$

$$\mathcal{L}_f(x, \Lambda) \quad = \quad f(X) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i g_i(X) \tag{7}$$

La solution du problème (1) à (3) est à chercher parmi les solutions du problème $\nabla_X \mathcal{L}_f = 0$ et $\nabla_\Lambda \mathcal{L}_f = 0$. C'est à dire en dimension finie

$$\forall i \in \{1, ..., n\}, \frac{\partial f}{\partial x_j} \quad = \quad -\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \tag{8}$$

$$\forall i \in \{1, ..., p\}, g_i(X) \quad = \quad 0 \tag{9}$$

2 1er exercice

$V = \mathbb{R}^3$, le convexe $\mathcal{C}$ est un cercle, intersection d'une sphère et d'un plan (on note

$X = (x_1, x_2, x_3))$:

$$\mathcal{C} = \left\{ X \in \mathbb{R}^3 \left| \begin{array}{ccccccc} x_1^2 & + & x_2^2 & + & x_3^2 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \end{array} \right. \right\} \tag{10}$$

On cherche le minimum sur $\mathcal{C}$ de la fonction $\mathcal{J}$:

$$\mathcal{J}(X) = 2x_1 - x_2 - x_3 \tag{11}$$

Notons que $\mathcal{J}$ est différentiable, convexe non stricte (car linéaire), coercive. On est assuré de l'existence de la solution puisque $\mathcal{C}$ est convexe stricte (un cercle est strictement convexe...).

On écrit le lagrangien en $(X, \Lambda) = (x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2)$:

$$\mathcal{L}_{\mathcal{J}}(X, \Lambda) = \left\{ \begin{array}{cccccc} & & 2x_1 & -x_2 & -x_3 & \\ +\lambda_1 & (& x_1^2 & +x_2^2 & +x_3^2 & -1) \\ +\lambda_2 & (& x_1 & +x_2 & +x_3 & -1) \end{array} \right. \tag{12}$$

On évalue alors les cinq dérivées partielles en

(X,Λ) :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}_{\mathcal{J}}}{\partial x_1}(X,\Lambda) &= 2+2\lambda_1 x_1+\lambda_2=0 && (13)\\
\frac{\partial \mathcal{L}_{\mathcal{J}}}{\partial x_2}(X,\Lambda) &= -1+2\lambda_1 x_2+\lambda_2=0 && (14)\\
\frac{\partial \mathcal{L}_{\mathcal{J}}}{\partial x_3}(X,\Lambda) &= -1+2\lambda_1 x_3+\lambda_2=0 && (15)\\
\frac{\partial \mathcal{L}_{\mathcal{J}}}{\partial \lambda_1}(X,\Lambda) &= x_1^2+x_2^2+x_3^2-1=0 && (16)\\
\frac{\partial \mathcal{L}_{\mathcal{J}}}{\partial \lambda_2}(X,\Lambda) &= x_1+x_2+x_3-1=0 && (17)
\end{aligned}$$

Si λ_1 est nul, (13) et (14) sont incohérentes, donc $\lambda_1 \neq 0$. On tire alors de (13) que $x_1 = \frac{-2-\lambda_2}{2\lambda_1}$ et de (14) et (15) que $x_2 = x_3 = \frac{1-\lambda_2}{2\lambda_1}$. On remplace dans les équations (16) et (17) :

$$\begin{aligned}
x_1^2+2x_2^2 &= 1 && (18)\\
x_1+2x_2 &= 1 && (19)
\end{aligned}$$

Soit :

$$\begin{aligned}
(3x_2-2)x_2 &= 0 && (20)\\
x_1 &= 1-2x_2 && (21)
\end{aligned}$$

Soit $x_2 = 0$ et $x_1 = 1$, donc $\mathcal{J}(X) = 2$, soit $x_2 = \frac{2}{3}$ et $x_1 = -\frac{1}{3}$ et $\mathcal{J} = -2$. Or on cherche bien le minimum, qui est donc ce dernier cas.

Soit la solution :

$$\bar{X} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \tag{22}$$

$$\min_{\mathcal{C}} \mathcal{J} = -2 \tag{23}$$

3 2nd exercice

Soient $V = \mathbb{R}^n$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, avec $p < n$ (donc $rg(B) = p$). Soit $c \in \mathbb{R}^p$.

On définit l'hyperplan affine (fermé) $E \subset V$ tel que $E = \{x \in V | Bx = c\}$. La connexité vient du caractère affine de E.

La projection orthogonale d'un point y sur l'hyperplan affine E est définiecomme l'argument minimum de la fonctionnelle $\mathcal{J}(x) = \frac{1}{2}||x - y||^2$ avec $x \in E$

On écrit donc le Lagragien de cette fonctionnelle :

$$\mathcal{L}_{\mathcal{J}}(x,\Lambda) = \frac{1}{2} < x-y|x-y > - < \Lambda|Bx-c > \tag{24}$$

Donc on sait calculer les gradients selon x et Λ respectivement :

$$\begin{cases} \nabla_x \mathcal{L}_{\mathcal{J}}(x,\Lambda) & = & (x-y) - B^t\Lambda & = & 0 \\ \nabla_\lambda \mathcal{L}_{\mathcal{J}}(x,\Lambda) & = & Bx - c & = & 0 \end{cases} \tag{25}$$

On multiplie la première équation par B ce qui donne

$$Bx - By - BB^t\Lambda = 0 \tag{26}$$

Or, on sait que $Bx = c$ donc :

$$c - By = BB^t\Lambda \tag{27}$$

Or B est de rang p, donc la matrice BB^t est aussi de rang p (résultat classique sur les dimensions des noyaux). D'où BB^t est inversible et
$\lambda = (BB^t)^{-1}(c - By)$ D'où
$x = y + B^t\Lambda = y + B^t(BB^t)^{-1}(c - By)$.

Le projecteur s'écrit alors

$\mathcal{P}_E = Id + B^t(BB^t)^{-1}(c - BId)$

CQFD

4 3e exercice

V est l'espace des fonction $C^1([0,1])$ qui sont nulles en 0 et en 1. Le convexe $\mathcal{C}$ est l'ensemble des fonctions de somme 1 sur $[0,1]$. On cherche (en gros) à trouver le minimum de la norme H_0^1 sur $\mathcal{C}$.

$$\mathcal{J}(v) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(v^2(x) + v'^2(x)\right) dx \qquad (28)$$

On écrit le lagrangien

$$\mathcal{L}_{\mathcal{J}}(v,\lambda) = \lambda + \frac{1}{2}\int_0^1 \left(v^2(x) + v'^2(x) + \lambda v(x)\right) dx \qquad (29)$$

On a montré que le minimum d'une telle fonction est atteint pour une fonction u vérifiant l'équation différentielle aux conditions aux bords

$u(0) = u(1) = 0$:

$$-u'' + u = -\lambda \tag{30}$$

Or, on connaît les solutions d'une telle équation sous la forme $u(x) = -\lambda + a\sinh(x) + b\cosh(x)$, or les conditions aux bornes donnent :

$$b = \lambda \tag{31}$$

$$a = \lambda\frac{1-\cosh(1)}{sinh1} = -\lambda\frac{e-1}{e+1} \tag{32}$$

Soit

$$u(x) = \lambda\left(-1 - \frac{e-1}{e+1}\sinh(x) + \cosh(x)\right) \tag{33}$$

Il suffit alors, comem la somme de u sur $[0, 1]$ vaut 1 de poser :

$$\lambda = \frac{1}{\int_0^1 \left(-1 - \frac{e-1}{e+1}\sinh(x) + \cosh(x)\right) dx} \tag{34}$$

(je n'ai pa simplifié...)

5 4e exercice

Nous revoilà avec cette fichue chaînette. On doit miniser la valeur :

$$\bar{y} = \frac{1}{n+1} \sum_{0}^{n} \frac{y_i + y_{i+1}}{2} \tag{35}$$

Sachant que $y_0 = 0$ et $y_{n+1} = 0$

$$\bar{y} = \frac{1}{(n+1)} \sum_{1}^{n} y_i \tag{36}$$

Si on note $P = \frac{1}{n+1}(0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots, 0, 1)$ alors recherche le minimum de $\bar{y}$ revient à chercher le minimum de $< P|U >$.

On sait aussi que la longueur de chaque barre est fixée, vallant l, soit la contrainte

$$\forall i \in 0, n, (x_i + x_{i+1})^2 + (y_i + y_{i+1})^2 - l^2 = 0 \tag{37}$$

(cf. corrigé pour les matrice B_i

On écrit alors le lagrangien :

$$\mathcal{L}(U,\Lambda) = < P|U > + \sum_{i=0}^{n} (< B_i U|U > -1)\, \lambda_i \tag{38}$$

Et roule jeunesse