ESC Toulouse
D. Herlemont

2005
Mastère BIF

Examen Gestion de portefeuille

Durée : 2 heures

- Les documents ne sont pas autorisés.
- Pour les questions à choix multiples, une ou plusieurs réponses peuvent être proposées.

1 pt **1.** On suppose que les rendements journaliers d'un portefeuille sont identiquement distribués et indépendants selon une loi normale. Par quel facteur doit on multiplier la volatilité mensuelle du portefeuille pour obtenir une volatilité annuelle.

a) 12
b) 144
c) 3.46
d) 14.142

Justifier la réponse.

Corrigé : réponse C

Le rendement annuel peuvent être considéré comme la somme des rendements mensuels. Si les rendements mensuels sont iid, alors les variances s'ajoutent, d'où

$$\sigma^2_{annuel} = 12\sigma^2_{mensuel}$$

et

$$\sigma_{annuel} = \sqrt{12}\sigma_{mensuel} = 3.46 \times \sigma_{mensuel}$$

1 pt **2.** Un portefeuille d'actions (sans dividende) a une performance annuelle de 5% en moyenne géométrique entre le 1er Janvier 1998 et le 31 Décembre 2004. La moyenne arithmétique est de 6%. La valeur du portefeuille au 1er Janvier 1998 est de 100 000 €. Quelle est la valeur du portefeuille à la fin 2004 :

A. 135 000 €.
B. 140 710 €.
C. 142 000 €.
D. 150 363 €.

Expliciter le résultat.

Corrigé : réponse B

Soient P_i le prix à la date i, pour $i = 0, .., n$. le rendement sur une période est

$$r_i = \frac{P_i - P_{i-1}}{P_{i-1}}$$

la moyenne géométrique est r_g,

$$r_g = \sqrt[n]{\prod(1 + r_i)} - 1$$

Autrement dit

$$(1 + r_g)^n = \prod_{i=1,n} \frac{P_i}{P_{i-1}} = \frac{P_n}{P_0}$$

Si $P_0 = 100000$ est la valeur du portefeuille au 1er Janvier 1998, la valeur du portefeuille à fin 2004 sera :

$$P_7 = (1 + 0.05)^7 * 100000 = 140710$$

D'ou la réponse **B**

Remarque, la moyenne arithmétique n'est pas utile ici. La moyenne arithmétique est

$$r_a = \frac{1}{n} \sum_{i=1,n} r_i$$

Elle nécessairement supérieure à la moyenne géométrique. Il n'y a égalité que lorsque les rendements sont égaux. On peut montrer que

$$r_g \approx r_a - \frac{1}{2}\sigma^2$$

avec σ, l'écart type des rendements (la volatilité).

Dans cet exercice, le rendement arithmétique est 6%, on peut en déduire la volatilité :

$$\sigma \approx \sqrt{2(6\% - 5\%)} = 14.1\%$$

1 pt **3.** Un investisseur envisage d'ajouter un autre actif dans un portefeuille. Afin d'assurer une diversification maximale, l'investisseur devrait ajouter l'actif dont la corrélation avec le portefeuille est

A. -1
B. -0.5
C. 0
D. +1

Justifier la réponse.

Corrigé : réponse A

La diversification maximale sera obtenue en recherchant la variance minimale. Si on considère deux actifs X Y de variance σ_x et σ_y et corrélation ρ, la variance de $X + Y$ est

$$\sigma_{x+y} = \sigma_x^2 + 2\rho\sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2$$

Elle est minimale pour $\rho = -1$ et dans ce cas, elle est égale à $(\sigma_x - \sigma_y)^2$.

1 pt **4.** On considère deux actifs A et B dont les rendements dépendent de situations économiques (que l'on supposera equiprobables) :

Etats	A	B
Crise	-10%	2%
Baissier	-4%	7%
Reprise	4%	6%
Croissance	12%	4%
Forte Croissance	20%	4%

Calculer l'espérance des rendements et la variance de chaque société.
Expliciter les résultats.

Corrigé :

	A	B
espérance	4.4%	4.6%
variance	0.0116	0.000304
volatilité	10.8%	1.74%

formules utilisés :

$$\bar{a} = \frac{1}{n} \sum_{i=1,n} a_i \quad \bar{b} = \frac{1}{n} \sum_{i=1,n} b_i$$

$$\sigma_a^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1,n} (a_i - \bar{a})^2 \quad \sigma_b^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1,n} (b_i - \bar{b})^2$$

avec a_i et b_i les rendements des sociétés A et B.

1 pt **5.** En utilisant les données de la question 4, calculer la covariance et la corrélation des rendements des deux sociétés.
Expliciter les résultats.

Corrigé :

covariance	5.6e-05
corrélation	0.0298

formules utilisés :

$$\sigma_{ab} = covariance(A, B) = \frac{1}{n} \sum_{i=1,n} (a_i - \bar{a})(b_i - \bar{b})$$

$$correlation(A, B) = \frac{covariance(A, B)}{\sigma_a \sigma_b}$$

2 pt **6.** En utilisant les données de la question 4, si les sociétés A et B sont combinées dans un seul portefeuille à hauteur de 50%, calculer le rendement espéré, ainsi que l'écart type.
Expliciter les résultats.

Corrigé :
Le rendement espéré du portefeuille est

$$r_p = 0.5\bar{a} + 0.5\bar{b} = 4.5\%$$

L'écart type du portefeuille

$$\sigma_p = \sqrt{0.5^2\sigma_a^2 + 2 * 0.5 * 0.5 * \sigma_{ab} + 0.5^2\sigma_b^2} = 5.48\%$$

1 pt **7.** Les objectifs d'un investisseur doivent être exprimés en terme de :

A. risque et espérance des rendements
B. espérance des rendements
C. besoin en liquidité et horizon d'investissement
D. de contraintes fiscales, légales et réglementaires

Justifier la réponse.

Corrigé : réponse A
On peut également ajouter les réponses **C** et **D**. En aucun cas l'espérance des rendements ne devra être prise en compte seule.

1 pt **8.** Le risque d'une action (ou obligation) qui n'est pas corrélée avec le marché (et qui peut donc être diversifié) est le risque :

A. le risque de taux d'intérêt
B. le risque de taux de change
C. le risque de modèle
D. le risque spécifique

Corrigé : réponse D

1 pt **9.** Dans le cadre de la théorie du portefeuille, le risque non systématique

A. est le seul risque résiduel
B. est un risque non diversifiable
C. est contenu dans le portefeuille de marché
D. fait référence à la variabilité de tous les actifs en réponse à des évènements macro-économiques.

Corrigé : réponse A

2 pt **10.** Le portefeuille de marché a une variance de 0.05, le taux sans risque est de 5%. Le taux de rendement espéré du marché est de 15%. Un actif A a un rendement espéré de 10%.

– En application du MEDAF (ou CAPM), quels sont les risques associés à la détention de l'actif A.
– Expliquer en quoi il est différent d'être investi au 2/3 dans le portefeuille de marché ou totalement investi dans l'actif A ?

Corrigé : Dans le cadre du CAPM, les rendements de l'actif A sont lié aux rendements du marché par la relation :

$$R_t = r_f + \beta(R_{M,t} - r_f) + \epsilon_t$$

avec r_f le taux sans risque, $R_{M,t}$ le rendement du marché à la date t et ϵ_t une variable aléatoire, de moyenne nulle et indépendante des rendements du marché. Ou en espérance

$$R = r_f + \beta(R_M - r_f)$$

En terme de risque, représenté par la variance, le risque du titre A se décompose en

$$\underbrace{\sigma^2}_{\text{risque total}} = \underbrace{\beta^2\sigma_M^2}_{\text{risque systématique}} + \underbrace{\sigma_\epsilon^2}_{\text{risque spécifique}}$$

Dans le cas de l'actif A, on détermine le β

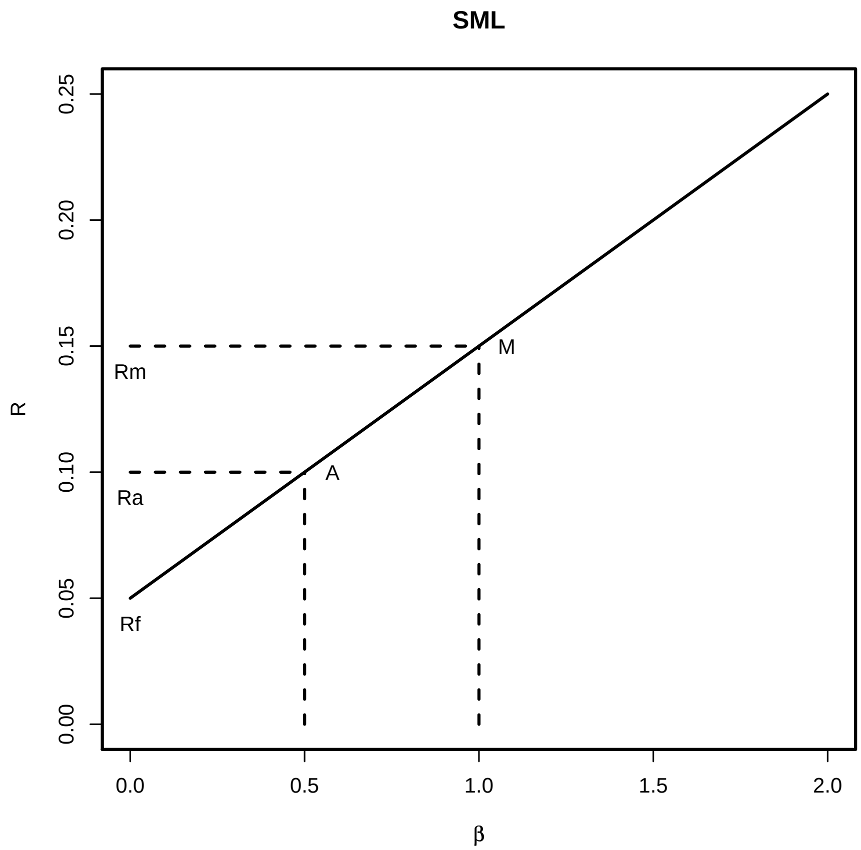
$$\beta = \frac{R - r_f}{R_M - r_f} = \frac{0.1 - 0.05}{0.15 - 0.05} = 0.5$$

Le risque systématique est donc $\beta^2\sigma_M^2 = 0.0125$ $\beta\sigma_M = 0.112$

Le risque spécifique ne peut pas être déterminé en absence d'information supplémentaire sur le titre A.

Dans le cas d'un portefeuille investi au 2/3 dans le portefeuille de marché, l'espérance de rendement de la composante risquée est de 10%, identique à l'actif A. Contrairement à l'actif A, l'investissement dans le portefeuile de marché ne présente pas de risque spécifique.

1 pt **11.** Tracer la Security Market Line, en utilisant les informations de la question précédente 10.



Placer le titre A.

1 pt **12.** S'agissant de la Security Market Line, laquelle parmi ces propositions est fausse :

A. Un actif correctement évalué se trouve sur la SML.
B. La SML conduit tous les investisseurs à investir dans le même portefeuille.
C. La SML fournit un benchmark pour évaluer la performance attendue
D. La SML représente la relation entre l'espérance des rendements et les betas.

Corrigé : réponse B

1 pt **13.** Laquelle parmi ces propositions n'est pas la conséquence de l'aversion au risque :

A. la pente de la Security Market Line est positive.
B. Le rendement attendu d'une obligation AAA est plus élevé qu'une obligation A.
C. Les investisseurs espèrent une relation positive entre les rendements et le risque.
D. Les investisseurs préfèrent les portefeuilles sur la frontière efficiente que tout autre portefeuille avec le même rendement.

Corrigé : réponse B

2 pt **14.** Vous disposez des informations suivantes :

	poids	beta	écart type (risque spécifique σ_ϵ)
Action I	20%	1.2	11%
Action II	40%	0.9	14%
Action I	40%	1	20%

L'écart type du facteur commun (le marché) est 15%. En utilisant le modèle a un facteur, calculer l'écart type du risque non systématique :

a) 10%
b) 15%
c) 15.8%
d) 16.2%
e) 18%

Justifier la réponse.

Corrigé : réponse A

Dans un modèle à un facteur, les rendements des titres peuvent s'écrire sous la forme :

$$R_{it} = \alpha_i + \beta_i R_{Mt} + \epsilon_{it}$$

avec ϵ_{it} de moyenne nulle, indépendant de R_{Mt} et de ϵ_{jt} pour tout $j \neq i$. La variance du titre i est

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_M^2 + \sigma_\epsilon^2$$

La covariance d'un titre i avec j est

$$cov(R_{it}, R_{jt}) = \beta_i \beta_j \sigma_F^2$$

Si on considère un portefeuille avec les pondérations w_i dans l'actif i, le rendement du porrtefeuille est

$$r_{pt} = \sum_{i=1,n} w_i \alpha_i + \left(\sum_{i=1,n} w_i \beta_i \right) R_{Mt} + \sum_{i=1,n} w_i \epsilon_{it}$$

La variance résiduelle du portefeuille est donc :

$$\sigma_{p\epsilon}^2 = \sum_{i=1,n} w_i^2 \sigma_{i\epsilon}^2$$

La solution est donc

$$\sigma_{p\epsilon}^2 = 0.2^2 \times 0.11^2 + 0.4^2 \times 0.14^2 + 0.4^2 \times 0.2^2 = 0.01$$

d'ou

$$\sigma_{p\epsilon} = 10\%$$

1 pt **15.** On considère un fonds alternatif dont les valeurs (NAV) mesnuelles sont les suivantes (en milliers d'euros) :

Janvier	Févier	Mars	Avril	Mai	Juin	Juillet	Aout	Sept.	Oct.	Nov.	Déc.
10000	9900	10100	10000	9900	10000	9800	9900	9600	9800	9900	9600

Quel est la perte maximale historique (maximum drawdown)

a) 4.17%
b) 5.21%
c) 3.03%
d) 4.95%

Justifier la réponse.

Corrigé : réponse D

Soit W_t la valeur du fond à la date t, notons M_t le maximum atteint à la date t :

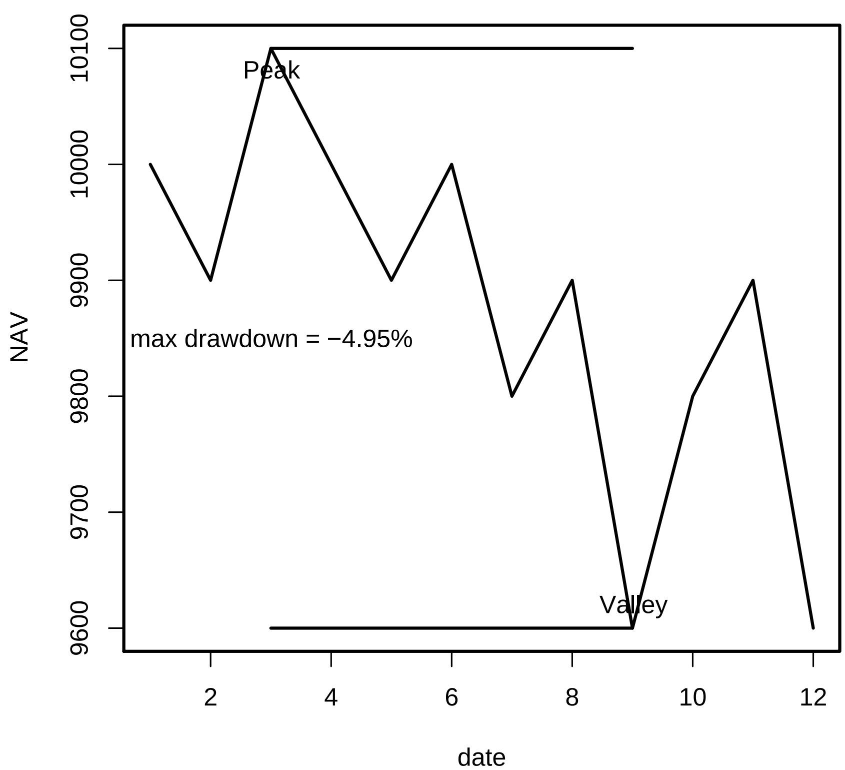
$$M_t = \max_{0 \leq s \leq t} W_s$$

La perte historique à la date t est la perte qu'aurait subi un investisseur si il avait investi au plus haut :

$$DD_t = \frac{M_t - W_t}{M_t}$$

La perte maximale historique est le maximum

$$MDD_t = \max_{0 \le s \le t} DD_s$$



1 pt **16.** Citer trois caractéristiques qui distinguent la gestion alternative de la gestion traditionnelle.

Corrigé :

La gestion alternative se caractérise par :

– la recherche d'une performance absolue, décorrélée des actifs classiques (actions, obligations, ...)
– Une rémunération des gérants à la performance
– l'utilisation systématique du levier, de vente à découvert ou de produits dérives
– une implantation généralement offshore
– généralement réservé à des clients fortunés
– un risque de gérant (alors que la gestion traditionnell présente un risque de marché)
– une liquidité moindre

1 pt **17.** Expliquer pourquoi l'optimisation de portefeuille Espérance/Variance et les mesures de performance classiques (ratio de Sharpe, l'information ratio, ...) peuvent conduire à des choix erronés, notamment en gestion alternative ? Citer une ou plusieurs autres méthodes alternatives

Corrigé :

Deux raisons principales :

- L'absence de corrélation significative avec les actifs de base rend difficile l'utilisation des outils classiques, tels que les modèles de type CAPM, analyse de style ou modèles à facteurs utilisant des actifs de base (actions, obligations, devises, ...)
- La non gaussianité des rendements est généralement plus prononcé que dans le cas d'actifs classiques. Une analyse uniquement basée sur l'espérance et la variance (les moments d'ordre 1 et 2) ne sont plus représentatifs de la distribution des rendements. Par exemple, certaines stratégies (vente de put en dehors de la monnaie) peuvent avoir des ratios de Sharpe élevés et présenter des risques élevés pour l'investisseur.

Parmi des méthodes "alternatives", citons

- l'utilisation des modèles à facteurs statistiques et implicite (analyse en composante pricnipale)
- la prise en compte des moments d'ordre 3 (Asymétrie) et 4(Kurtosis)
- Optimisation/Frontière efficientes basé sur d'autres mesures de risque que la variance : semi-variance, Value at Risk, ...
- Utilisation de mesures de performance qui tient compte des asymétries et applatissement de la distribution des rendements, telles que le Morningstar Risk Adjusted Return (équivalent certain d'une fonction d'utilité de l'investisseur), l'indice de Stutzer, la mesure Omega, ...

(Toutes ces techniques sont également applicables en gestion traditionnelle)