Cours de gestion financière (M1)

Séance (5) du 17 octobre 2014

Efficience de marché, ventes à découvert, exercices, compléments de cours (modèle zéro-beta de Black, Médaf sans ventes à découvert)

Are Markets Efficient? http://harvardecon.org/?p=2816 Harvard Economic Review (avec la permission de Dilbert !)

Plan de la séance 5

- Efficience de la finance et « monde réel »
  - *La bourse apprécie-t-elle les bons managers ?*
  - *Études d'événements : est-ce les annonces de résultats comptables ont une valeur pour les investisseurs ?*
- Exercices
  - *Cas Markoland, préparation au premier CC, choisir parmi 3 portefeuilles (mutuellement) exclusifs, risque et coefficient de corrélation*
- Vente de titres à découvert
  - *Mécanismes financiers + exercice*
- Exercices complémentaires
  - *portefeuille de variance minimale, arbitrage, exercice de synthèse*
- Compléments de cours
  - *Une démonstration du Médaf, le Médaf sans actif sans risque (modèle de Black), interdiction de ventes à découvert*

Économie réelle et économie financière

- Plusieurs sujets de débats
  - Lien entre cours boursiers et « valeurs fondamentales »
  - Prise en compte des informations relatives à l'entreprise
  - « Stockholders » contre « Stakeholders »
- Est-ce que les cours de bourse représentent bien la valeur actuelle des flux reçus par les actionnaires actualisés ?
  - *Avec un taux d'actualisation prenant en compte de manière adéquate le risque*
- Ou au contraire, peut-il y avoir des écarts substantiels
  - *Surévaluations liés à des bulles spéculatives*
  - *Sous-évaluations liées à des crises de liquidité*
    - Purs effets d'offre et de demande indépendants des perspectives de gains ou des niveaux de risque
  - *Retour sur la bulle internet du début des années 2000*
    - Les prévisions très (trop) optimistes étaient-elles irrationnelles ?

Économie réelle et économie financière

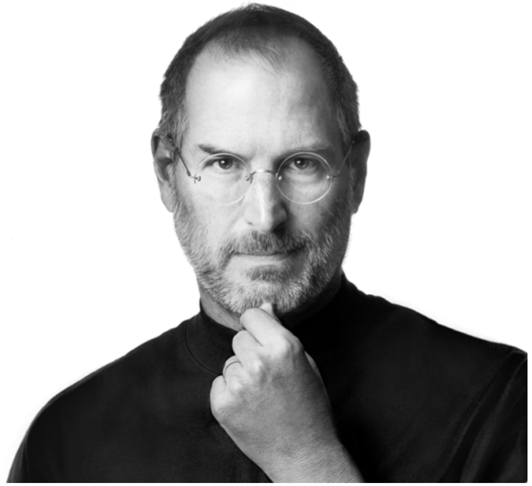
- Est-ce que les informations pertinentes pour la vie de l'entreprise se manifestent par des changements dans les cours boursiers ?
    - Pour la sous ou surévaluation, on s'intéresse au niveau des cours boursiers
    - Ici, on s'intéressent au changement des cours boursiers
        - Voir transparent suivant
- Un autre sujet de controverse et d'incompréhension a à voir avec la propriété de l'entreprise
    - *Stockholders (actionnaires) et « Stakeholders » (ayant droits de l'entreprise, y compris les salariés)*
        - Une entreprise comme Peugeot a une valeur boursière très faible car les flux versés aux actionnaires sont très faibles, alors même que la masse salariale est très importante
        - Mais ces actionnaires décident pour une bonne part du sort des salariés

Économie réelle et économie financière études d’événements

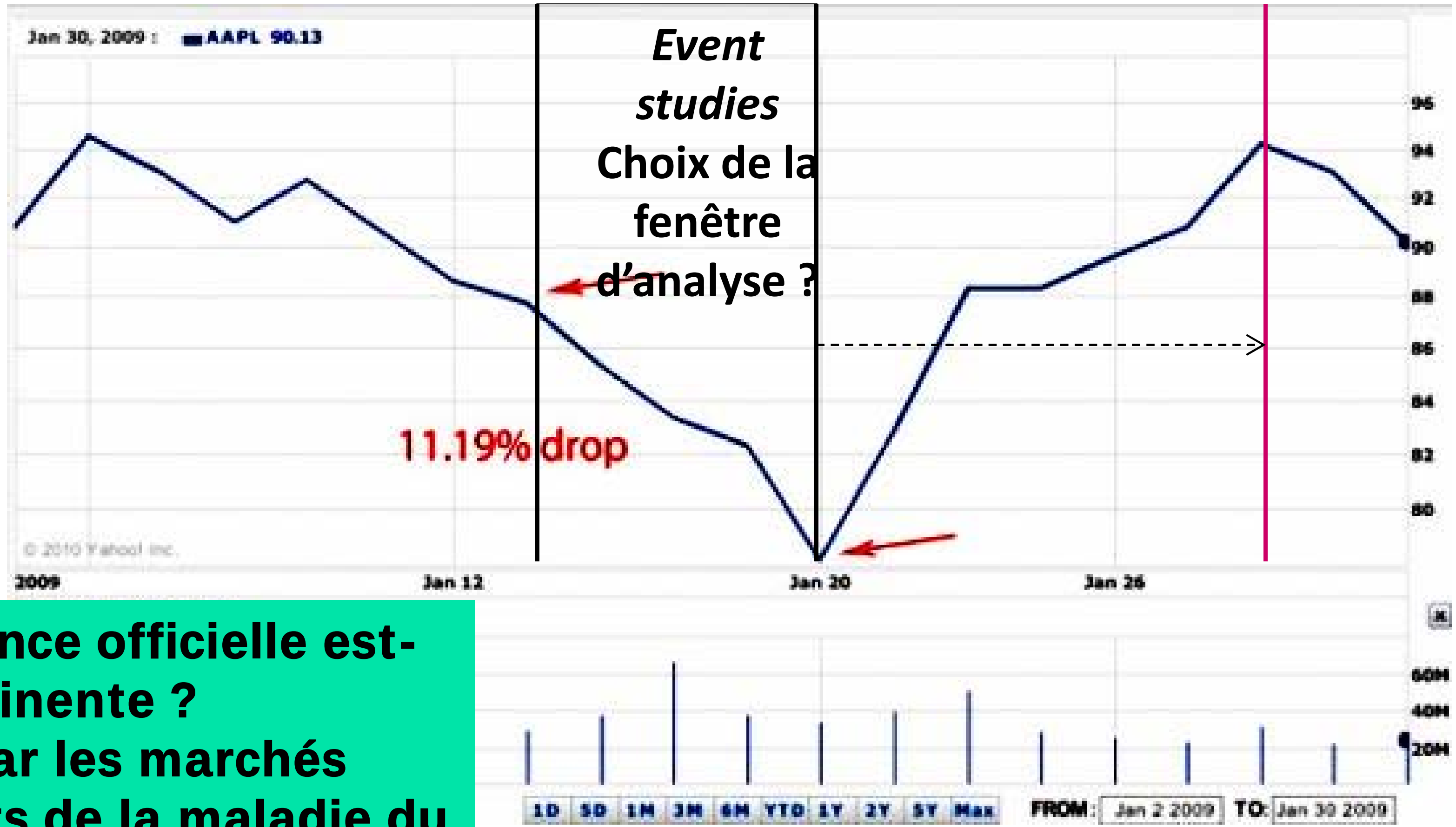
- Étude d’événements / event studies
  - *Outil d’investigation empirique pour évaluer les conséquences des décisions stratégiques des entreprises*
  - *En matière financière et comptable*
    - Annonce de résultats, politique de distribution de dividendes, modification de la structure financière, augmentations de capital, introductions en bourse, forme organisationnelle et managériale, systèmes de rémunération (stock-options)
  - *En matière d’investissements*
    - Fusions, croissance externe, spin-offs
  - *Les marchés financiers permettent d’évaluer rapidement l’impact de décisions à très long terme*
    - Mécanisme de l’actualisation (DDM) : une augmentation des résultats à long terme se traduit immédiatement par une augmentation de l’action

Économie réelle et économie financière

- Le 14 janvier 2009, Steve Jobs fait savoir qu'il prend un congé maladie



La baisse du cours de l'action est-elle liée au départ de S. Jobs ou à la baisse générale du marché boursier ?



La date de l'annonce officielle est-elle pertinente ?
Anticipation par les marchés boursiers des effets de la maladie du patron d'Apple ?

Économie réelle et économie financière

- Le cas précédent va au-delà de la question de l’efficience informationnelle
  - *En s’interrogeant sur l’impact de la maladie de S. Jobs sur le cours boursier d’Apple, on considère également le rôle des dirigeants dans la création de valeur, la question du leadership, les rémunérations incitatives (actions, stock-options), la gouvernance (continuité de l’entreprise, plans de succession,cohérence de l’équipe dirigeante).*
  - *Pour aller plus loin :*
    - Koch, J. V., Fenili, R. N., & Cebula, R. J. (2011). Do Investors Care if Steve Jobs is Healthy?. *Atlantic Economic Journal*, *39*(1), 59-70.
      - http://jamesvkoch.com/uploads/Do_Investors_Care_If_Steve_Jobs_Is_Healthy__AEJ.pdf
    - Les auteurs tendent à relativiser l’impact des annonces relatives à la santé de S. Jobs, contrairement à l’intuition première

– PANTHÉON - SORBONNE –
UNIVERSITÉ PARIS 1

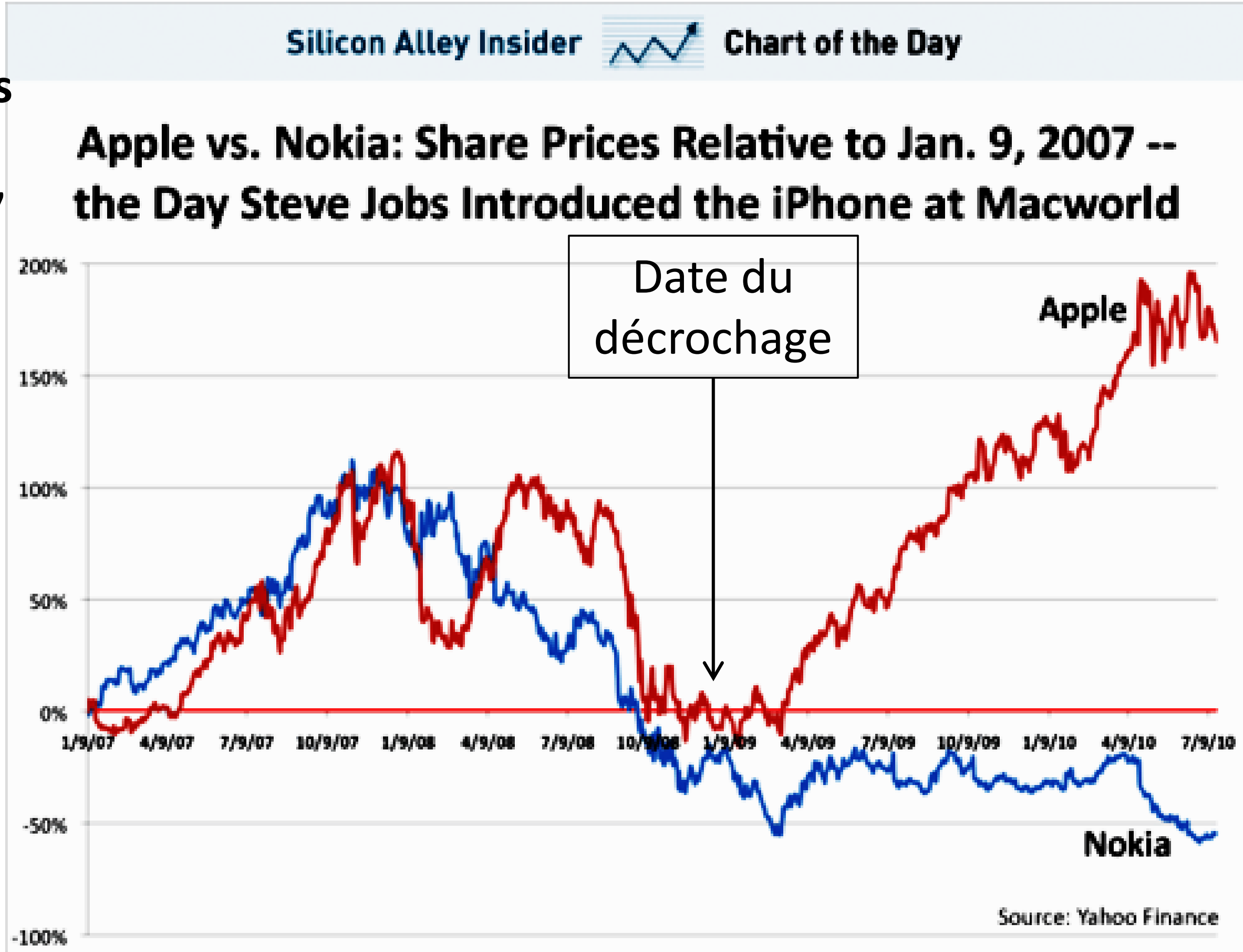
Économie réelle et économie financière

- Économie réelle, économie financière

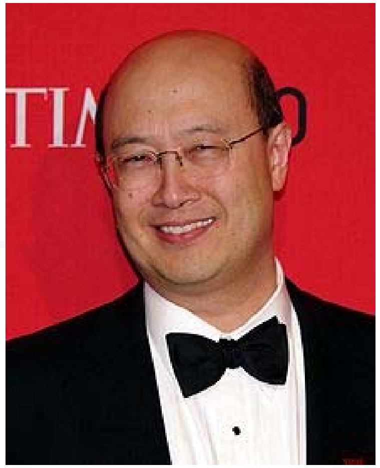
Performances comparées des actions Nokia et Apple entre janvier 2007 et septembre 2010

Il y a plusieurs facteurs explicatifs au décrochage, mais il se produit environ deux ans après le lancement de l'iPhone

Base 100 au lancement de l'iPhone



Économie réelle et économie financière, études d'événements



A. Lo

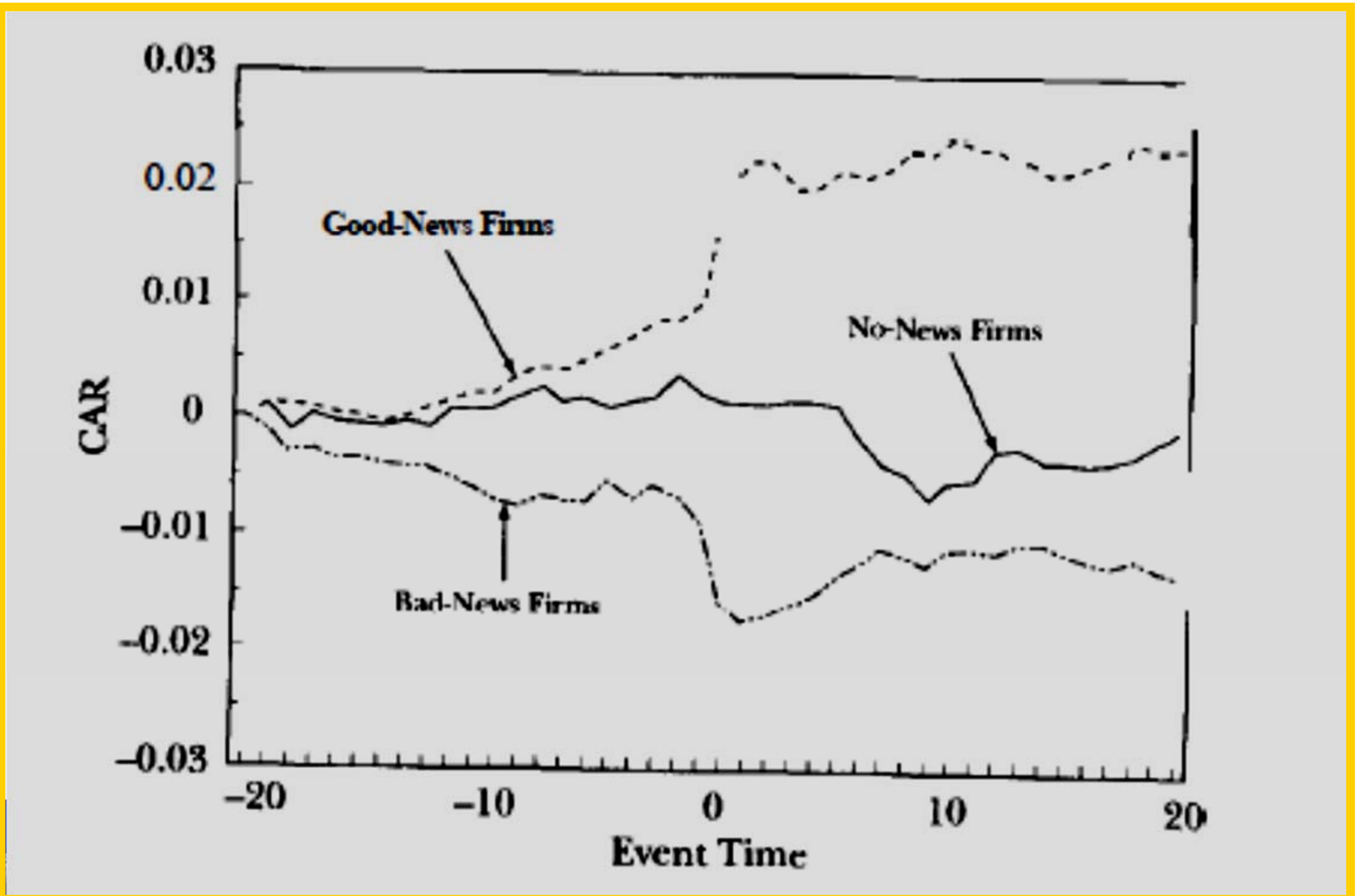
- Une (très) brève introduction aux études d'événements
  - Inspirée du chapitre 4 du livre de Campbell, Lo et MacKinlay
- *On va s'intéresser au contenu informatif des annonces trimestrielles de résultat par les entreprises*
- *Ont-elles une pertinence pour les marchés boursiers ?*
- *On va s'intéresser aux rentabilités anormales autour des annonces de résultats*
- *Rentabilité anormale : écart entre la rentabilité d'un titre et celle fournie par le modèle de marché*
- $\varepsilon_{i,t} = R_{i,t} - \alpha_i - \beta_i R_{M,t}$

Économie réelle et économie financière, études d'événements

- On s'intéresse aux prévisions de résultats du système « International Broker Estimate »
  - *Moyenne des prévisions de résultats fournis par les analystes financiers suivant une valeur*
  - *On compare les résultats annoncés et les prévisions des analystes*
  - *Si le résultat annoncé dépasse de 2,5% celui prévu, c'est une « bonne nouvelle »*
  - *Si le résultat annoncé est inférieur d'au moins 2,5% à celui prévu, c'est une mauvaise nouvelle*
  - *Dans la fourchette [-2,5%,2,5%], pas de surprise*
  - *Comment le marché réagit à ces différentes informations ?*

Économie réelle et économie financière, études d'événements

On constate une augmentation des rentabilités anormales cumulées au moment de l'annonce d'une bonne surprise
Cet effet est en partie anticipé … délits d'initiés



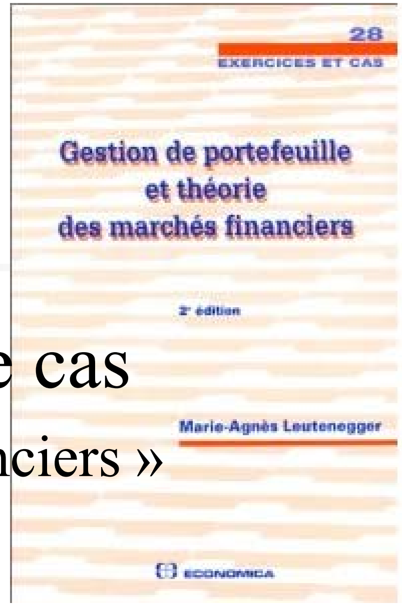
C. MacKinlay

J. Campbell

Économie réelle et économie financière, études d'événements

- Les approches précédentes considèrent les informations nouvelles sont incorporées dans les cours boursiers.
- On peut aussi considérer à la <u>volatilité endogène</u> des marchés
  - *En résumé, liée à l'irrationalité des investisseurs, des manipulations de cours, des contraintes liées à l'accès à la liquidité et aux problèmes de coordination des agents, etc.*
  - *Beaucoup d'ordres de bourse ne seraient pas liés à l'arrivée d'informations nouvelles impliquant des réallocations rationnelles de portefeuilles*
  - *Selon Robert Haugen, les ¾ de la volatilité seraient endogènes au marché …*
    - *The new finance: the case against efficient markets* Prentice Hall, 1999

Le cas Markoland



- Cas extrait d'un livre d'exercices corrigés et de cas
  - « Gestion de portefeuille et théorie des marchés financiers »
  - Marie-Agnès Leutenegger, Economica, 3ième édition
- Données du problème
  - Titres A et B de prix aujourd'hui 120 € et 1700 €, valeur d'un part de portefeuille de marché M aujourd'hui : 260 €
  - Dividende de 10 € pour A et de 100 euros pour B, payés en fin de période.

Probabilité	Cours de A en €	Cours de B en €	Valeur du portefeuille de marché M
0.2	100	2200	250
0.3	130	1500	330
0.3	150	2000	340
0.2	180	2400	360

Le cas Markoland

- Question 1
  - *Calculer pour A, B et M, les taux de rentabilité possibles, leur niveaux espérés* $\boldsymbol{E_A}, \boldsymbol{E_B}, \boldsymbol{E_M}$*, les écart-types des rentabilités* $\boldsymbol{\sigma_A}, \boldsymbol{\sigma_B}, \boldsymbol{\sigma_M}$*, le coefficient de corrélation linéaire* $\boldsymbol{\rho_{AB}}$ *et les Betas ,* $\boldsymbol{\beta_A}, \boldsymbol{\beta_B}$

Le cas Markoland

- Tableau des rentabilités

Probabilité	rentabilité de A	rentabilité de B	rentabilité de M
0.2	-8.33%	35.29%	-3.85%
0.3	16.67%	-5.88%	26.92%
0.3	33.33%	23.53%	30.77%
0.2	58.33%	47.06%	38.46%

- Espérances de rentabilités
- $\boldsymbol{E_A} = 0{,}2 \times (-8{,}33\%) + 0{,}3 \times 16{,}67\% + 0{,}3 \times 33{,}33\% + 0{,}2 \times 58{,}33\% = \mathbf{25}\%$
- $\boldsymbol{E_B} = \mathbf{21{,}76}\%, \boldsymbol{E_M} = \mathbf{24{,}23}\%$

Le cas Markoland

- Remarques sur la manière de mener les calculs
  - *Il est plus simple de compléter le tableau précédent à partir d'Excel*
  - *Si Excel est disponible …*
    - Les fonctions statistiques standard d'Excel ne sont pas utiles ici
    - Attention également aux différentes formules de calcul d'écart-type « dans l'échantillon » ou « dans la population » (ce dernier étant privilégié en finance)
  - *Dans quelques cas, on peut simplifier les calculs à la main*
    - $E_A = 0{,}2 \times \frac{110-120}{120} + 0{,}3 \times \frac{140-120}{120} + 0{,}3 \times \frac{160-120}{120} + 0{,}2 \times \frac{190-120}{120} = \frac{0{,}2\times(-10)+0{,}3\times20+0{,}3\times40+0{,}2\times70}{120} = \frac{-2+6+12+14}{120} = \frac{30}{120} = \frac{1}{4}$
  - *Mais ce n'est pas généralisable*

Le cas Markoland

- Écart-types des taux de rentabilité
  - $\sigma_A^2 = 0{,}2 \times (-8{,}33\% - E_A)^2 + +0{,}3 \times (16{,}67\% - E_A)^2 + 0{,}3 \times (33{,}33\% - E_A)^2 + 0{,}2 \times (58{,}33\% - E_A)^2$
  - $Avec\ E_A = 25\%$
  - $On\ trouve\ \boldsymbol{\sigma_A = 22{,}05\%, \sigma_B = 19{,}87\%, \sigma_M = 14{,}60\%}$
- Covariance entre les taux de rentabilité de A et de B
  - $\boldsymbol{C_{AB}} = 0{,}2 \times (-8{,}33\% - E_A) \times (35{,}29\% - E_B) + 0{,}3 \times \cdots = \boldsymbol{0{,}015196}$
- Coefficient de corrélation linéaire $\boldsymbol{\rho_{AB}}$
  - $\boldsymbol{\rho_{AB}} = \frac{\boldsymbol{C_{AB}}}{\boldsymbol{\sigma_A} \times \boldsymbol{\sigma_B}} = \frac{0{,}015196}{22{,}05\% \times 19{,}87\%} = \boldsymbol{0{,}3469}$

Le cas Markoland

- Calcul des Betas
  - $\boldsymbol{\beta_A = \frac{\mathrm{Cov}(R_A, R_M)}{\sigma_M^2} = \frac{C_{AM}}{\sigma_M^2}}$
  - *On calcule C_{AM} de la même manière que C_{AB} et on trouve*
  - $C_{AM} = 0{,}0292$
  - $\boldsymbol{\beta_A} = \frac{0{,}0292}{0{,}0213} = \mathbf{1,3683}$
  - $\boldsymbol{\beta_A > 1}$ *(titre offensif)*
  - *Le même raisonnement appliqué à B donne* $\boldsymbol{\beta_B = -0,1072}$
  - $\boldsymbol{\beta_B < 0}$ *(situation atypique).*

UNIVERSITÉ PARIS 1 – PANTHÉON - SORBONNE –

Le cas Markoland

- Question 2 :
  - *Il existe un actif sans risque de taux de rentabilité* $\boldsymbol{R_f = 10\%}$
  - *Quelle est la prime de risque de marché* $\boldsymbol{E_M - R_f}$ *?*
  - *Quelle est la rentabilité espérée des titres A et B d'après l'équation de la SML ?*
  - *Comment interpréter les différences avec les rentabilités espérées obtenues à la question 1 ?*

Le cas Markoland

- Question 2 :
  - $E_M - R_f = 24,23\% - 10\% = 14,23\%$
    - En utilisant la SML, on obtient la rentabilité attendue de A
  - $E_A = R_f + \beta_A \times (E_M - R_f) = 10\% + 1{,}3683 \times 14{,}23\% = \mathbf{29,47\%}$
    - De même, on trouve que $E_B = 8,47\%$
  - *Or, le premier calcul a donné* $E_A = 25\%$
  - *Comment interpréter la différence entre les 2 valeurs de* E_A *?*
    - Un (au moins) des deux calculs pose problème
    - On a pu se tromper sur les probabilités des différentes rentabilités
    - Ce qui affecte les calculs dans les deux approches
    - Si les calculs sont effectués avec un échantillon de rentabilités observées, on a fait un calcul dans l'échantillon et non pas dans la population (ce qui revient à une erreur sur les données)

Le cas Markoland

- Question 2 : Comment interpréter cette différence ? (suite)
  - *S'il n'y avait aucun « bruit d'échantillonnage »*
    - Connaissance parfaite des lois de probabilité des rentabilité
    - Et donc des espérances de rentabilité et des betas titres
  - *On pourrait encore se tromper sur le taux sans risque* $\boldsymbol{R_f}$
  - *Si ce n'est pas le cas, soit le MEDAF est invalidé, soit les marchés sont inefficients*
    - Dans le premier cas, on donne une valeur normative au MEDAF
    - C'est souvent l'approche des ouvrages académiques (la théorie prime)
    - Ici, $\boldsymbol{\alpha_A = E_A - \left(R_f + \beta_A \times \left(E_M - R_f\right)\right) < 0}$ alpha de Jensen négatif
    - Le taux de rentabilité proposé par le marché est inférieur au taux normatif du MEDAF
    - Pour qu'il remonte et revienne « à la normale », le prix de A doit baisser
    - Stratégie de vente à découvert du titre ?

Le cas Markoland

- Question 3 : on suppose que le portefeuille de marché est efficient et que c'est le portefeuille tangent. Établir l'équation de la CML

Le cas Markoland

- Question 3 : on suppose que le portefeuille de marché M est efficient et que c'est le portefeuille tangent. Établir l'équation de la CML
  - *La CML est la demi-droite qui relie l'actif sans risque et le portefeuille de marché dans le plan (écart-type des rentabilités, espérance des rentabilités)*
  - *Actif sans risque* $\boldsymbol{R_f = 10\%}$
  - *Portefeuille de marché :* $\boldsymbol{E_M = 24,23\%}$, $\boldsymbol{\sigma_M = 14,60\%}$
  - *Soit un portefeuille P sur la CML. On écrit l'égalité des pentes entre l'actif sans risque et les portefeuilles P ou M*
  - $\boldsymbol{\frac{E_P - R_f}{\sigma_P} = \frac{E_M - R_f}{\sigma_M} = \frac{24{,}23\% - 10\%}{14{,}6\%} = 0,9747}$ *(ratio de Sharpe de M)*
  - $\boldsymbol{E_P = 10\% + 0,9747 \times \sigma_P}$

Le cas Markoland

- Question 4 : l’investisseur s’est fixé un niveau de risque de $\mathbf{12\%}$
- Calculer l’espérance de rentabilité de son portefeuille et sa composition

Le cas Markoland

- Question 4 : l'investisseur s'est fixé un niveau de risque de $\mathbf{12\%}$
- Calculer l'espérance de rentabilité de son portefeuille et sa composition
  - *On part de* $\boldsymbol{E_P = 10\% + 0,9747 \times \sigma_P}$ *avec* $\boldsymbol{\sigma_P = 12\%}$
  - *D'où* $\boldsymbol{E_P = 21,7\%}$
  - *On sait que sur la CML,* $\boldsymbol{\sigma_P = X \times \sigma_M}$*, où X est la proportion investie en portefeuille de marché*
  - *Or,* $\boldsymbol{\sigma_P = 12\%}$*,* $\boldsymbol{\sigma_M = 14,60\%}$
  - *D'où* $\boldsymbol{X = 82,2\%}$
  - *La part investie en actif sans risque est* $\boldsymbol{1 - X = 17,8\%}$

Le cas Markoland

- Question 5 : calculer le risque total, le risque de marché et le risque spécifique du titre B

Le cas Markoland

- Question 5 : calculer le risque total, le risque de marché et le risque spécifique du titre B
  - *On rappelle que* $\boldsymbol{\sigma_B^2 = (\beta_B \sigma_M)^2 + \sigma_\varepsilon^2}$
  - *Où* $\boldsymbol{\sigma_\varepsilon}$ *est le risque spécifique,* $\boldsymbol{\sigma_B}$ *le risque total et* $\boldsymbol{|\beta_B \sigma_M|}$ *le risque de marché.*
  - *On a déjà calculé* $\boldsymbol{\sigma_B = 19,87\%}$
  - $\boldsymbol{\beta_B = -0,1072, \sigma_M = 14,60\%}$
  - *D'où* $\boldsymbol{|\beta_B \sigma_M| = 1,56\%}$
  - *De* $\boldsymbol{\sigma_\varepsilon^2 = \sigma_B^2 - (\beta_B \sigma_M)^2}$*, on tire* $\boldsymbol{\sigma_\varepsilon = 19,81\%}$
  - *Le risque spécifique de B est prépondérant.*

Préparation au premier contrôle continu

- Problème posé par P-A. Patard (2012)
  - $R_f = 3\%$

Problème (7 points)

Soit un marché composé de 3 titres risqués notés A_1, A_2, A_3 dont les capitalisations boursières (exprimées en milliards d'€) et les rendements espérés E_i sont donnés dans le tableau ci-dessous. Par ailleurs, il existe un actif non risqué (un bon du trésor), l'actif A_0, dont le taux de rendement est $R_f = 3\%$.

Actif	A_1	A_2	A_3
CB (Mds€)	250	150	100
E_i	3%	2.5%	5%

1. Donner la composition du portefeuille de marché M (calculer les poids des titres dans celui-ci).
2. En déduire E_M puis déterminer l'équation de la SML.
3. Calculer β_i pour chaque titre.

Préparation au premier contrôle continu

- $\boldsymbol{X_1 = 50\%, X_2 = 30\%, X_3 = 20\%}$
- $E_M = 0{,}5 \times E_1 + 0{,}3 \times E_2 + 0{,}2 \times E_3$
- $\boldsymbol{E_M} = 0{,}5 \times 3\% + 0{,}3 \times 2{,}5\% + 0{,}2 \times 5\% = \boldsymbol{3{,}25}\%$
- La SML est donnée par $\boldsymbol{E_i = R_f + \beta_i \times \left(E_M - R_f\right)}$
- $\boldsymbol{E_i = 3\% + \beta_i \times 0{,}25\%}$
- $\beta_i = \frac{E_i - 3\%}{0{,}25\%}, E_1 = 3\%, E_2 = 2{,}5\%, E_3 = 5\%$
- $\boldsymbol{\beta_1 = 0, \beta_2 = -2, \beta_3 = 8}$

UNIVERSITÉ PARIS 1 – PANTHÉON - SORBONNE –

Préparation au premier contrôle continu

- Suite du problème

Nous donnons ci-dessous la composition du portefeuille Medalyon.

Actif	A_0	A_1	A_2	A_3	Total
Montant Investi (M€)	10	45	27	18	100

4. Donner le poids de chaque actif dans le fonds.
5. Calculer le beta du fonds β_P et son rendement attendu E_P.
6. Donner le montant du portefeuille investi sur les titres risqués, en déduire le poids de la poche taux (investie sur l'actif sans risque) et le poids de la poche action (investie sur les actifs risqués).
7. Le portefeuille est-il efficient ? Justifiez.

Préparation au premier contrôle continu

- $\beta_P = X_0 \times \beta_0 + X_1 \times \beta_1 + X_2 \times \beta_2 + X_3 \times \beta_3$
  - *Le premier actif étant sans risque* $\beta_0 = 0$
  - $X_1 = 45\%, X_2 = 27\%, X_3 = 18\%$
  - $\beta_1 = 0, \beta_2 = -2, \beta_3 = 8$
- $\boldsymbol{\beta_P =} 0{,}27 \times (-2) + 0{,}18 \times 8 = \mathbf{0,9}$
- $\boldsymbol{E_P = 3\% + \beta_P \times 0,25\% = 3,225\%}$
  - $\mathbf{90}\%$ *du portefeuille est investi en actions,* $\mathbf{10}\%$ *en actif sans risque*
  - *Au sein de la poche risquée, la part investi dans le titre 1 est* $45/90 = 50\%$*, dans le titre 2,* $27/90 = 30\%$ *et donc la part investie dans le titre 3 de* 20%
- L'allocation est identique à celle du portefeuille de marché (supposé efficient)

Révisions, exercices finance de marché

- Problème : choisir parmi un ensemble de portefeuilles (mutuellement) exclusifs
  - *Source : Finance 3e édition, Pearson, Collection Synthex*
  - *Farber, Laurent, Oosterlink & Pirotte*
    - Pages 62 et suivantes
  - *Tante Gaga est soumise à un choix cornélien : dans quelle sicav va-t-elle investir son épargne ?Elle a reçu des offres de trois banques (A, B et C) ayant des caractéristiques très différentes*
    - $\boldsymbol{E_A = 5\%, \sigma_A = 6\%}$
    - $\boldsymbol{E_B = 10\%, \sigma_B = 10\%}$
    - $\boldsymbol{E_C = 13\%, \sigma_B = 20\%}$
    - **Le taux sans risque, $\boldsymbol{R_F}$ est égal à 3%**

Révisions, exercices finance de marché

- Problème : choisir parmi un ensemble de portefeuilles (mutuellement) exclusifs
  - *Supposons que l'objectif de tante Gaga est d'obtenir une espérance de rentabilité de* **9%**
  - *A) Quelle allocation d'actif devrait-elle réaliser selon la sicav choisie et quel serait le risque correspondant ?*
  - *B) Que devrait-elle choisir ?*
    - $\boldsymbol{E_A = 5\%, \sigma_A = 6\%}$
    - $\boldsymbol{E_B = 10\%, \sigma_B = 10\%}$
    - $\boldsymbol{E_C = 13\%, \sigma_C = 20\%}$
    - $\boldsymbol{R_F}$ =3%

Révisions, exercices finance de marché

- Problème : choisir parmi un ensemble de portefeuilles
  - *Notons **X** la part de la richesse investie dans la sicav*
  - $\boldsymbol{E_P = XE_i + (1 - X)R_F = 9\%, \sigma_P = X\sigma_i, i = A, B, C}$
  - *D'où* $\boldsymbol{X = \frac{E_P - R_F}{E_i - R_F}}$
  - $\boldsymbol{X_A = 300\%, \sigma_P = 18\%}$
  - $\boldsymbol{X_B = 86\%, \sigma_P = 8,57\%}$
  - $\boldsymbol{X_C = 60\%, \sigma_P = 12\%}$
  - *Remarque : si **A** est choisie, tante Gaga empruntera pour investir un montant supérieur à son épargne initiale*
  - *Tante Gaga choisit la solution qui minimise le risque, c'est-à-dire la sicav B*

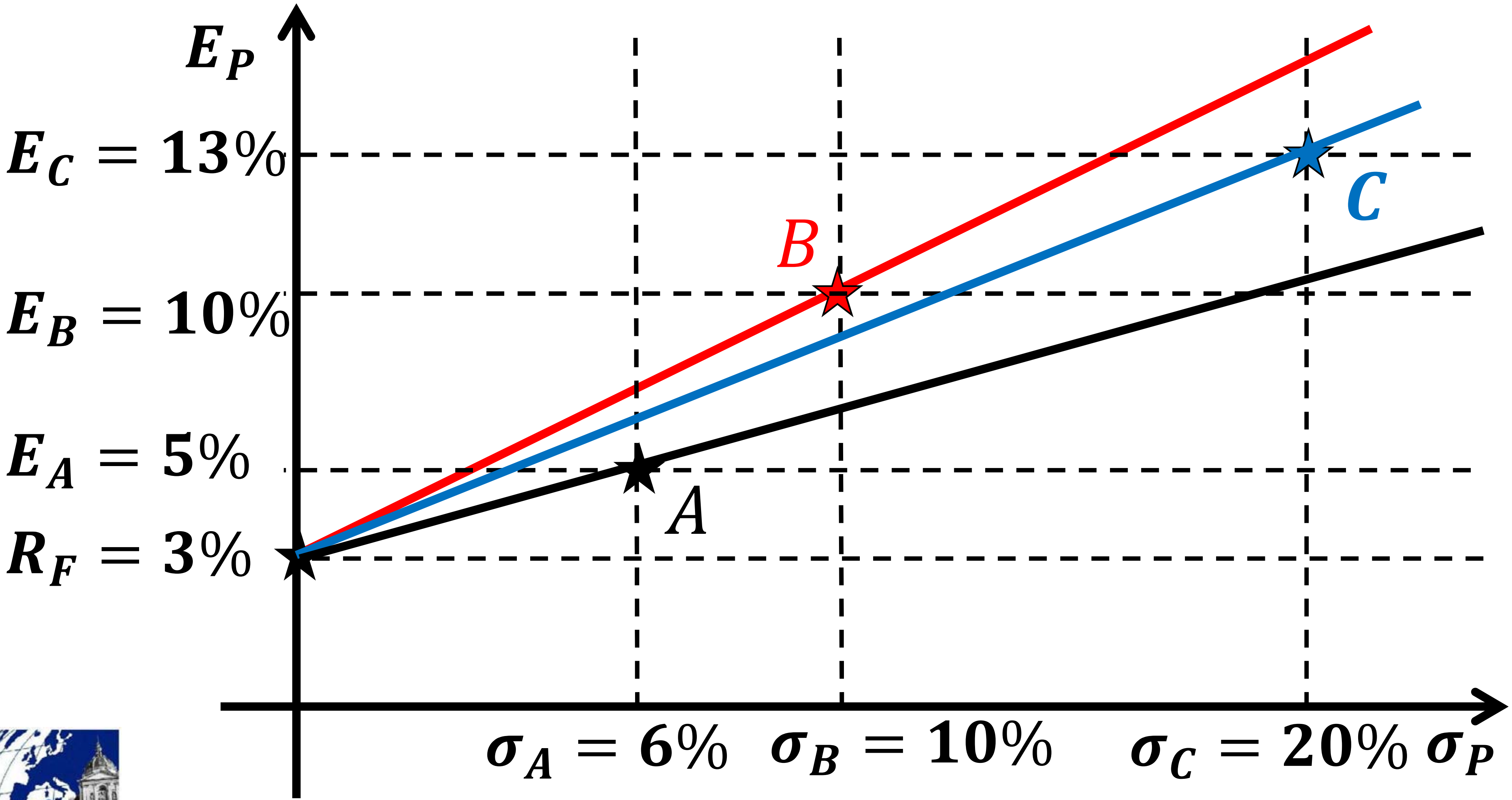
Révisions, exercices finance de marché

- Problème : choisir parmi un ensemble de portefeuilles
  - *Tante Gaga est maintenant prête à accepter que le risque de son portefeuille soit de* $\mathbf{15\%}$
  - *C) Quelle allocation d'actif devrait-elle réaliser selon la sicav choisie et quel serait l'espérance de rentabilité correspondante ?*
  - *D) Que devrait-elle choisir ?*
  - *E) Le choix de la sicav dépend-il de son objectif ?*
    - $\boldsymbol{E_A = 5\%, \sigma_A = 6\%}$
    - $\boldsymbol{E_B = 10\%, \sigma_B = 10\%}$
    - $\boldsymbol{E_C = 13\%, \sigma_C = 20\%}$
    - $\boldsymbol{R_F = 3\%}$

Révisions, exercices finance de marché

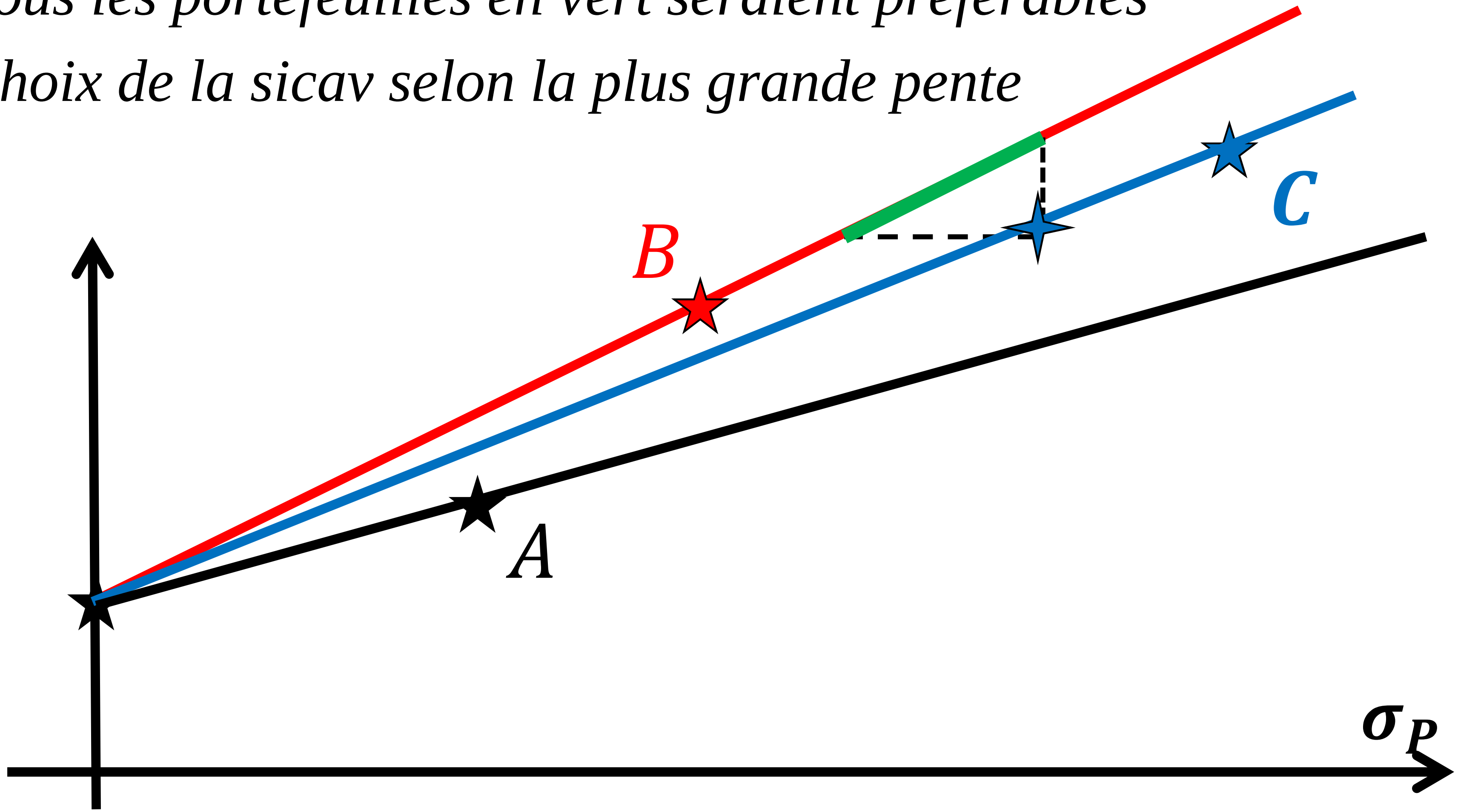
- Problème : choisir parmi un ensemble de portefeuilles
  - *Si Tante Gaga exprime son objectif en termes de risque, la proportion à investir dans la sicav choisie est*
  - $\boldsymbol{X = \sigma_P / \sigma_i \, , i = A, B, C}$ avec $\boldsymbol{\sigma_P = 15\%}$
  - *L'espérance de rentabilité est alors*
  - $\boldsymbol{E_P = XE_i + (1 - X)R_F = R_F + \frac{E_i - R_F}{\sigma_i} \times \sigma_P}$
  - $\boldsymbol{X_A = 250\%, E_P = 8\%}$
  - $\boldsymbol{X_B = 150\%, E_P = 13,50\%}$
  - $\boldsymbol{X_C = 75\%, E_P = 10,50\%}$
  - *Tante Gaga choisit la solution qui lui donne la rentabilité attendue la plus élevée : la sicav B de nouveau*

- Problème : choisir parmi un ensemble de portefeuilles



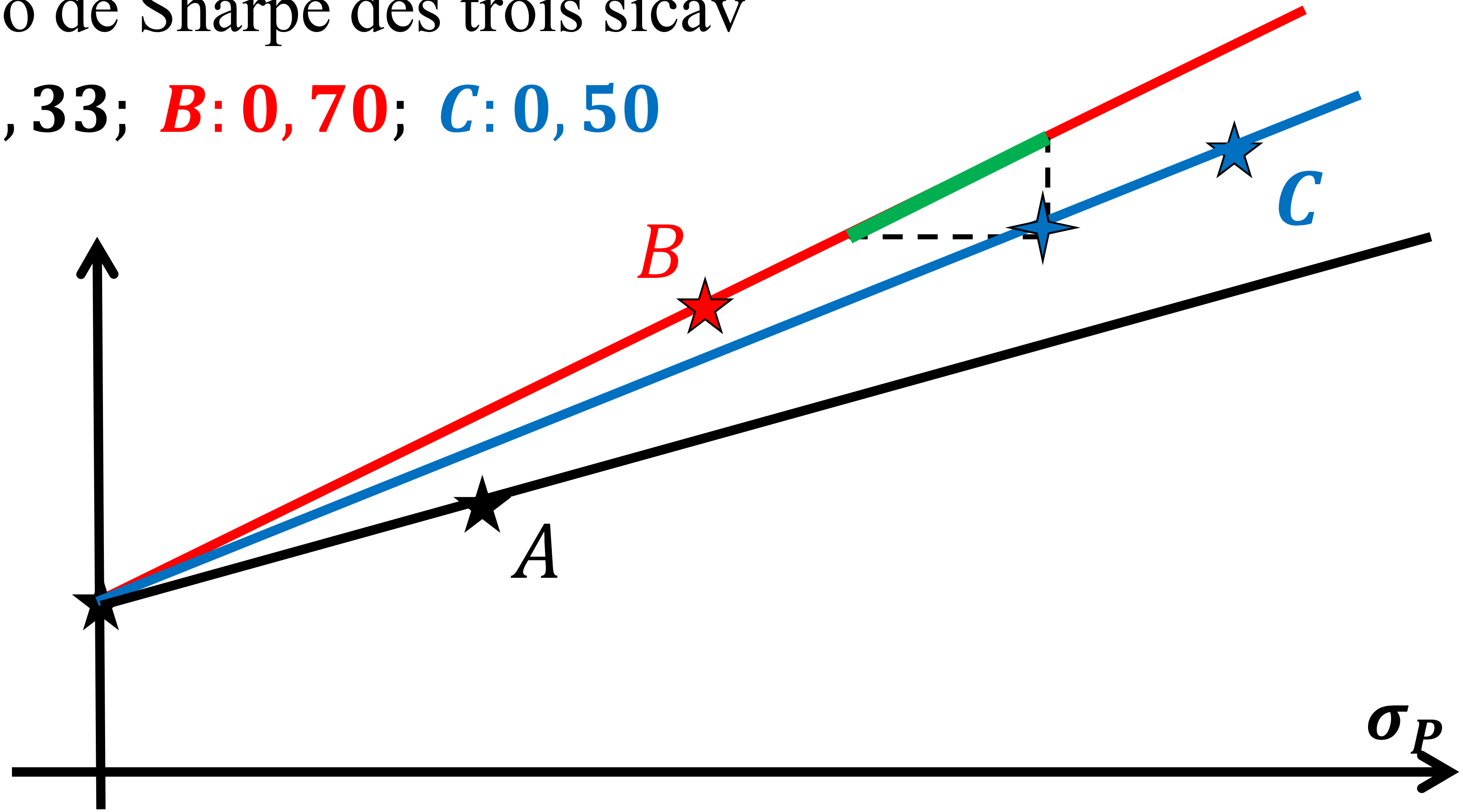
Révisions, exercices finance de marché

- B est toujours préférée
  - *Si le portefeuille ✦ est sélectionné, impliquant le choix C*
  - *Tous les portefeuilles en vert seraient préférables*
  - *Choix de la sicav selon la plus grande pente*



Révisions, exercices finance de marché

- Pente des demi-droites $\frac{E_i - R_F}{\sigma_i}$ (ratio de Sharpe)
- Ratio de Sharpe des trois sicav
- $\boldsymbol{A: 0,33}$; $\boldsymbol{B: 0,70}$; $\boldsymbol{C: 0,50}$



Révisions, exercices finance de marché

- Problème : caractérisation des portefeuilles efficients
  - *On considère un portefeuille **P***
  - $\boldsymbol{E_P, \sigma_P}$ *espérance et écart-type de la rentabilité du portefeuille*
  - $\boldsymbol{\beta_P}$ *beta du portefeuille (par rapport au portefeuille de marché)*
  - $\boldsymbol{E_M, \sigma_M}$ *espérance et écart-type de la rentabilité du portefeuille de marché*
  - $\boldsymbol{R_F}$ *taux sans risque*
  - $\boldsymbol{\rho_{PM}}$ *coefficient de corrélation entre la rentabilité du portefeuille **P** et celle du portefeuille de marché*
- Utiliser l'équation de la SML pour montrer que le ratio de Sharpe est maximal pour les portefeuilles efficients

Révisions, exercices finance de marché

- Problème : caractérisation des portefeuilles efficients
  - *ratio de Sharpe du portefeuille* $\boldsymbol{P}$: $\frac{\boldsymbol{E_P - R_F}}{\boldsymbol{\sigma_P}}$
  - *Équation de la SML :* $\boldsymbol{E_P = R_F + \beta_P(E_M - R_F)}$
  - $\boldsymbol{\beta_P = \frac{\rho_{PM}\sigma_P\sigma_M}{\sigma_M^2} = \frac{\rho_{PM}\sigma_P}{\sigma_M}}$
  - $\boldsymbol{\frac{E_P - R_F}{\sigma_P} = \rho_{PM}\frac{E_M - R_F}{\sigma_M} \leq \frac{E_M - R_F}{\sigma_M}}$*, puisque* $\boldsymbol{\rho_{PM} \leq 1}$
  - *Le ratio de Sharpe du portefeuille* $\boldsymbol{P}$ *est inférieur ou égal au ratio de Sharpe du portefeuille de marché*
  - *Égalité si* $\boldsymbol{\rho_{PM} = 1}$ *: le portefeuille* $\boldsymbol{P}$ *est parfaitement corrélé avec le portefeuille de marché*
  - *Portefeuilles combinant actif sans risque et* $\boldsymbol{M}$*, donc efficients*

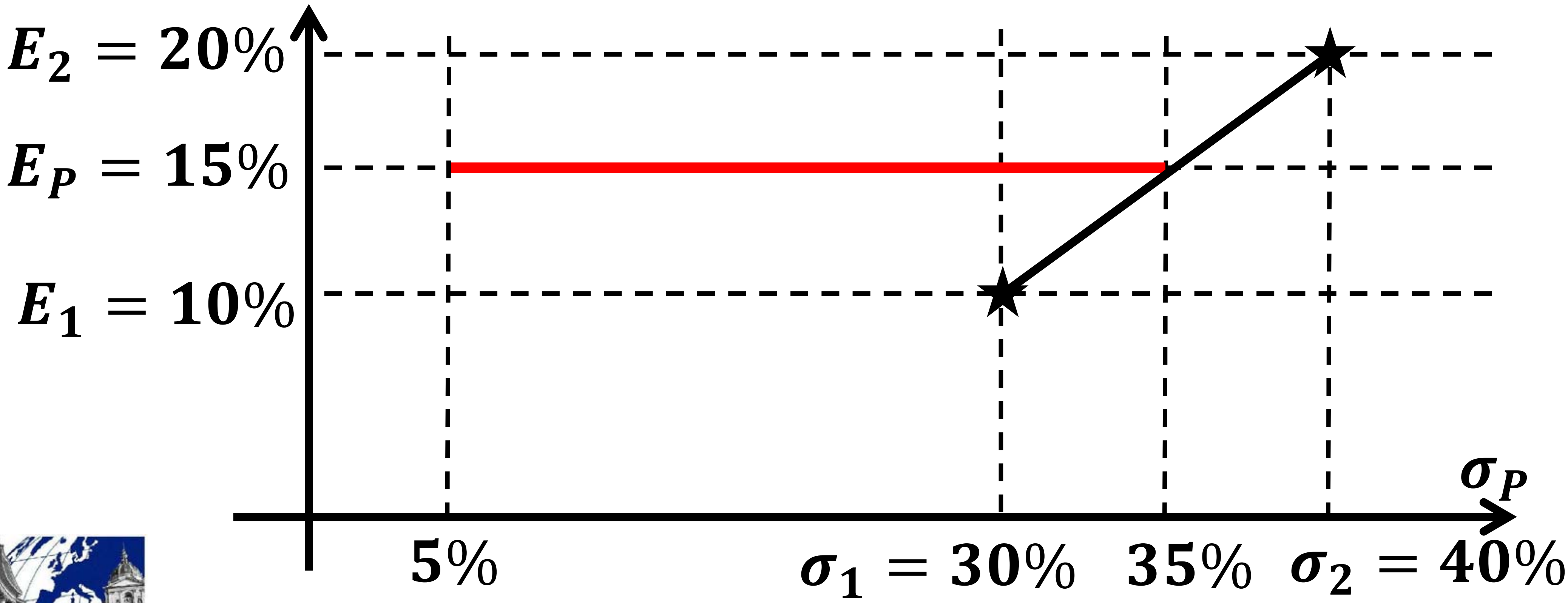
Révisions, exercices finance de marché

- Problème : risque et coefficient de corrélation
  - *Portefeuille de deux titres* $\mathbf{1, 2}$
  - *Espérances de rentabilités :* $\boldsymbol{E_1 = 10\%, E_2 = 20\%}$
  - *Écart-types des rentabilités* $\boldsymbol{\sigma_1 = 30\%, \sigma_2 = 40\%}$
  - $\boldsymbol{X_1 = X_2 = 50\%}$
  - *A) Représenter graphiquement dans le plan* $(\boldsymbol{E_P, \sigma_P})$*, le portefeuille précédent quand le coefficient de corrélation* $\boldsymbol{\rho}$ *entre les rentabilités des titres* $\mathbf{1}$ *et* $\mathbf{2}$ *varie entre* $\mathbf{-1}$ *et* $\mathbf{+1}$.
  - *B) Trouver le coefficient de corrélation tel que l'écart-type de la rentabilité du portefeuille est égal à l'écart-type de la rentabilité du titre* $\mathbf{1}$.

Révisions, exercices finance de marché

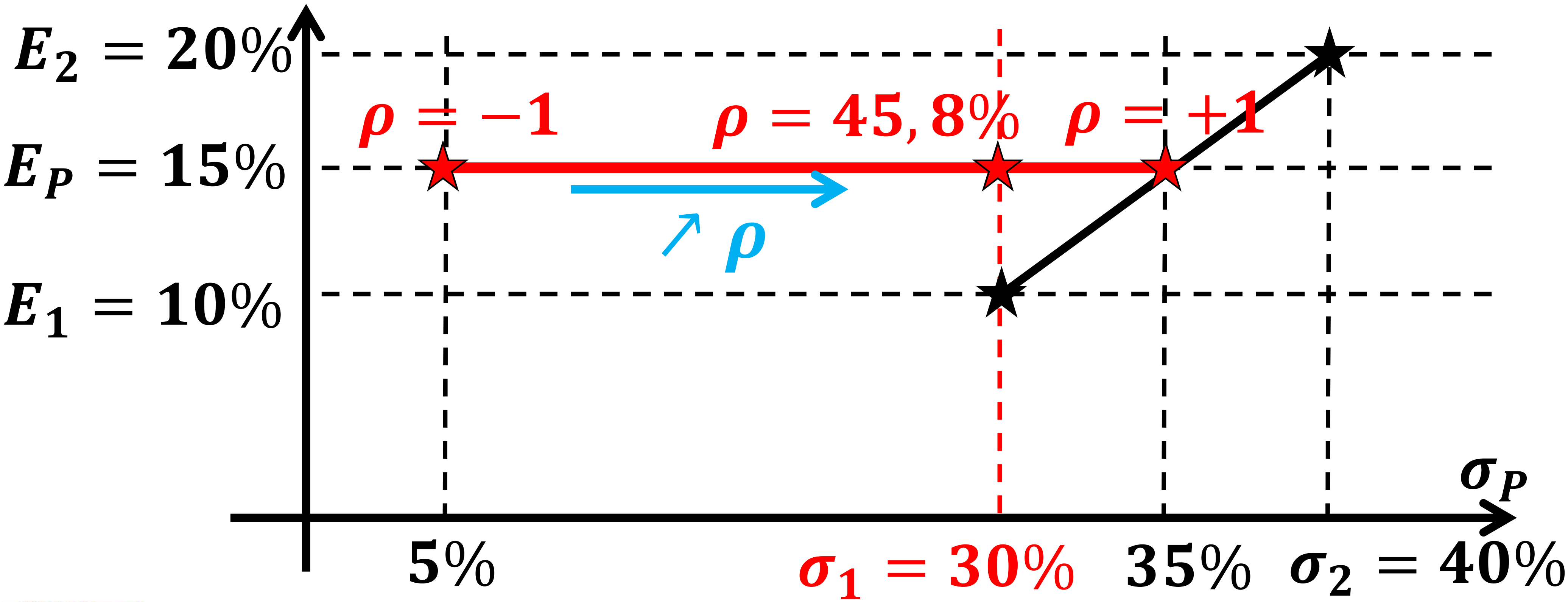
- Problème : risque et coefficient de corrélation
  - *Il suffit de reprendre les formules donnant* $\boldsymbol{E_P}$ *et* $\boldsymbol{\sigma_P}$
  - $\boldsymbol{E_P = X_1E_1 + X_2E_2 = 0,5 \times 10\% + 0,5 \times 20\% = 15\%}$
  - $\boldsymbol{E_P}$ *ne dépend pas de* $\boldsymbol{\rho}$
  - $\boldsymbol{\sigma_P^2 = X_1^2\sigma_1^2 + X_2^2\sigma_2^2 + 2X_1X_2\rho\sigma_1\sigma_2}$
  - *Avec* $\boldsymbol{X_1 = X_2 = 50\%, \sigma_1 = 30\%, \sigma_2 = 40\%}$
  - $\boldsymbol{2X_1X_2\sigma_1\sigma_2 = 0,06 \geq 0}$
  - $\boldsymbol{-1 \leq \rho \leq +1}$
  - $\boldsymbol{\sigma_P}$ *croît de manière affine avec* $\boldsymbol{\rho}$
  - *Valeur maximale de* $\boldsymbol{\sigma_P}$ *quand* $\boldsymbol{\rho = +1}$
  - *On a alors*
  - $\boldsymbol{\sigma_P = |X_1\sigma_1 + X_2\sigma_2| = 0,5 \times 30\% + 0,5 \times 40\% = 35\%}$

- Problème : risque et coefficient de corrélation (suite)
  - $\boldsymbol{\sigma_P}$ *croît de manière affine avec* $\boldsymbol{\rho}$
  - *Valeur minimale de* $\boldsymbol{\sigma_P}$ *quand* $\boldsymbol{\rho = -1}$
  - $\boldsymbol{\sigma_P = |X_1\sigma_1 - X_2\sigma_2| = |0,5 \times 30\% - 0,5 \times 40\%| =}$ $\color{red}{5\%}$



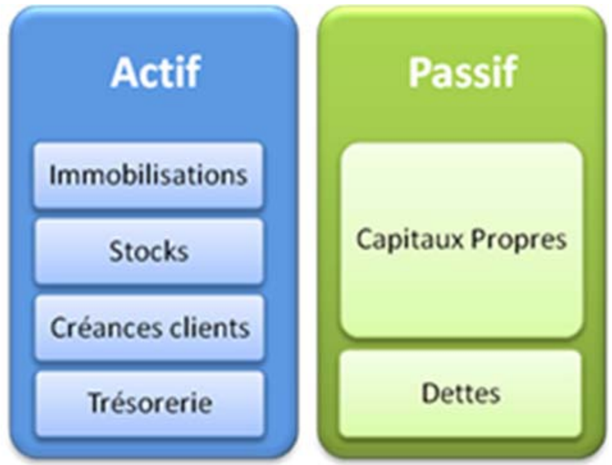
- Problème : risque et coefficient de corrélation (suite)
  - *B) Trouver le coefficient de corrélation tel que l'écart-type de la rentabilité du portefeuille est égal à l'écart-type de la rentabilité du titre* **1**.
  - *Il faut trouver* $\boldsymbol{\rho}$ *tel que*
  - $\boldsymbol{\sigma_P^2 = X_1^2\sigma_1^2 + X_2^2\sigma_2^2 + 2X_1X_2\rho\sigma_1\sigma_2 = \sigma_1^2}$
  - *Comme* $\boldsymbol{X_1 = X_2 = 1/2}$, *il faut trouver* $\boldsymbol{\rho}$ *tel que*
  - $\boldsymbol{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 = 4\sigma_1^2}$
  - $\boldsymbol{2\rho\sigma_1\sigma_2 = 3\sigma_1^2 - \sigma_2^2}$
  - *Comme* $\boldsymbol{\sigma_1 = 0,3, \sigma_2 = 0,4}$
  - $\boldsymbol{\rho = 11/24 = 45,8\%}$

- Problème : risque et coefficient de corrélation (suite)
  - *Les trois situations étudiées* $\boldsymbol{\rho = \pm 1, \rho = 45,8\%}$



Vente à découvert

- *Passif d'une entreprise*
- *Dette obligataire émise*
  - La valeur de marché des actions est égale à la valeur de l'actif
  - **Moins** la valeur de la dette obligataire émise
  - Valeur de la dette obligataire : nombre d'obligations vendues × prix unitaire
- *Il apparaît alors une quantité négative de titres obligataires dans la valeur des actions*
- *Détenir une **quantité négative** de titres veut donc dire que l'entreprise en tant que personne morale **doit ces titres***



UNIVERSITÉ PARIS 1 – PANTHÉON - SORBONNE –

Vente à découvert

- Vente à découvert
- Pour un investisseur « financier »
  - *Par exemple un gérant de portefeuilles*
    - Ou un particulier
  - *On peut envisager emprunter pour acheter des titres*
  - *On parle d'«effet de levier »*
    - Déjà évoqué à propos de la Capital Market Line
  - *Les fonds de placement n'ont pas toujours la possibilité d'emprunter*
    - Dépend des réglementations, des mandats donnés aux gérants
  - *Emprunter revient à vendre des obligations*
    - Pour ceux qui prêtent, les obligations sont un actif

Vente à découvert

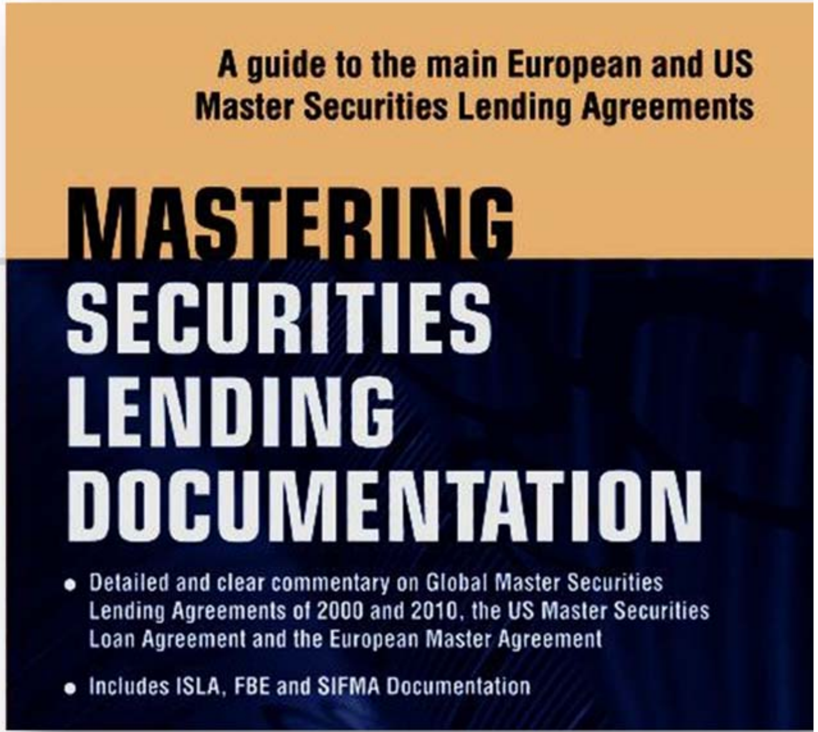
La semaine dernière, Apple annonçait que les précommandes de l'iPhone 5 dépassaient 2 millions d'unités, en seulement 24 heures.

- Ventes à découvert
  - *Parallèles avec l'économie réelle*
  - *Précommande d'une nouvelle voiture,*
    - D'un gadget technologique
  - *Celle-ci n'est pas encore produite*
    - La voiture
    - Délai parfois de plusieurs mois
    - Le paiement peut être lui à la commande
    - Et non à la livraison
  - *le fabriquant de véhicules automobiles a vendu à découvert cette voiture*
    - On n'a pas l'usage du bien avant sa livraison

iPhone virtuel

Livre de P. Harding

Vente à découvert



- *Marché de prêt et d'emprunt de titres*
  - Actions, Obligations
  - Taille de ce marché importante
  - Principe simple
  - Un investisseur A, mettons Axa dispose d'actions, disons Peugeot et les prête à un investisseur B, disons BNP Paribas.
  - A prête à B 10 000 actions Peugeot pour une une semaine
  - Au bout d'une semaine, B rend les actions empruntées à A
  - Il peut y avoir un dépôt de garanties, des commissions
  - Il existe des marchés connexes qui impliquent prêts de titres
  - repos et special repos (**repo = repurchase agreement**)

Vente à découvert

- *Le principe du prêt n'est pas spécifique aux titres financiers*
- *On peut emprunter une voiture à un ami, un concessionnaire pour un essai*
  - Ce qui pose des problèmes en cas d'accident ou de vol
- *Marché de prêts de bijoux, d'habits*
  - Pour une soirée
  - Commande sur internet
- *En général, on ne revend pas les bijoux empruntés*

Vente à découvert

- Il est fréquent qu'un investisseur revende le titre vient d'emprunter
  - *On parle alors de vente à découvert*
- Il suffit qu'il rachète un titre équivalent sur le marché et rende ce titre au prêteur
  - *Avantages de la fongibilité, titres au porteurs et pas d'usure*
  - *Risque de ne pas pouvoir trouver d'acheteur : « corner »*
  - *Sur un marché d'actions liquides, le principal risque est un risque de prix*

Vente à découvert

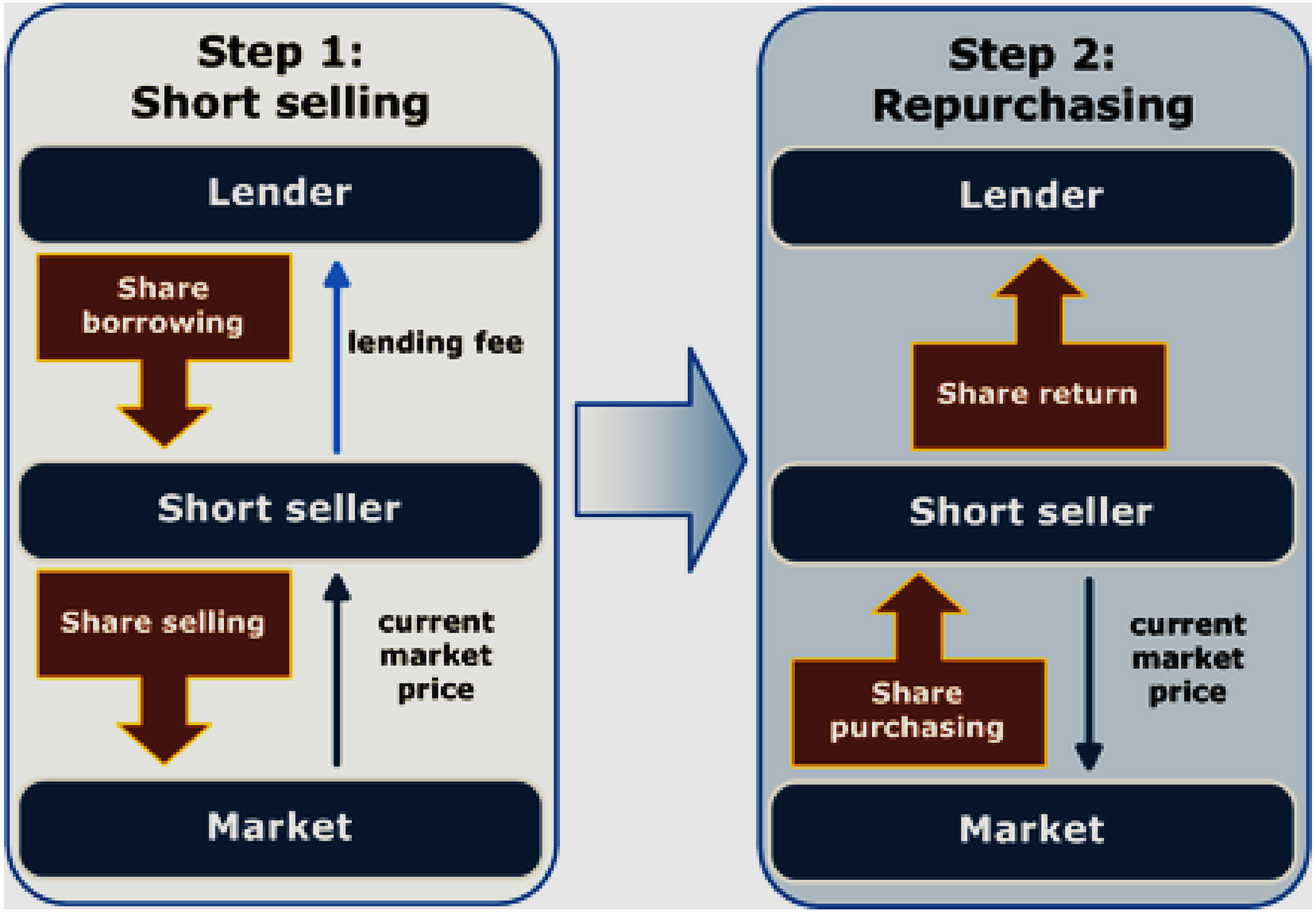
- Emprunt du titre en $\boldsymbol{t_0}$
  - *Pas de dépôt de garantie de « lending fee », de rebate*
  - *En $\boldsymbol{t_0}$, revente du titre au comptant au prix $\boldsymbol{P_0}$*
  - *Encaissement de $\boldsymbol{P_0}$*
  - *En $\boldsymbol{t_1}$, échéance du prêt de titres, achat du titre sur le marché au prix $\boldsymbol{P_1}$*
  - *Décaissement de $\boldsymbol{P_1}$ en $\boldsymbol{t_1}$*
  - *En $\boldsymbol{t_1}$, remise du titre emprunté au prêteur*
  - *On suppose qu'il n'y a pas de dividende payé entre $\boldsymbol{t_0}$ et $\boldsymbol{t_1}$*
- Variation de la richesse de l'investisseur entre t_0 et t_1
  - $\boldsymbol{P_0 - P_1 = -1 \times (P_1 - P_0)}$
  - ***Nombre de titres négatifs implique poids négatifs***

Vente à découvert

- La vente à découvert permet à celui qui la réalise de gagner en cas de baisse du titre
  - *Et de perdre en cas de hausse du titre*
  - *Profit symétrique à celui de l'acheteur*
- Elle permet également des « couvertures »
  - *Considérons un investissement étranger en France*
  - *La vente à découvert d'OAT permet de se protéger (en partie) contre le risque pays*
    - Les marchés à terme (Futures markets) permettent aussi de réaliser des ventes à découvert
- Facilite l'achat de titres par un investisseur impatient
  - *Il peut trouver quelqu'un qui lui vend un titre qu'il n'a pas encore.*

Vente à découvert

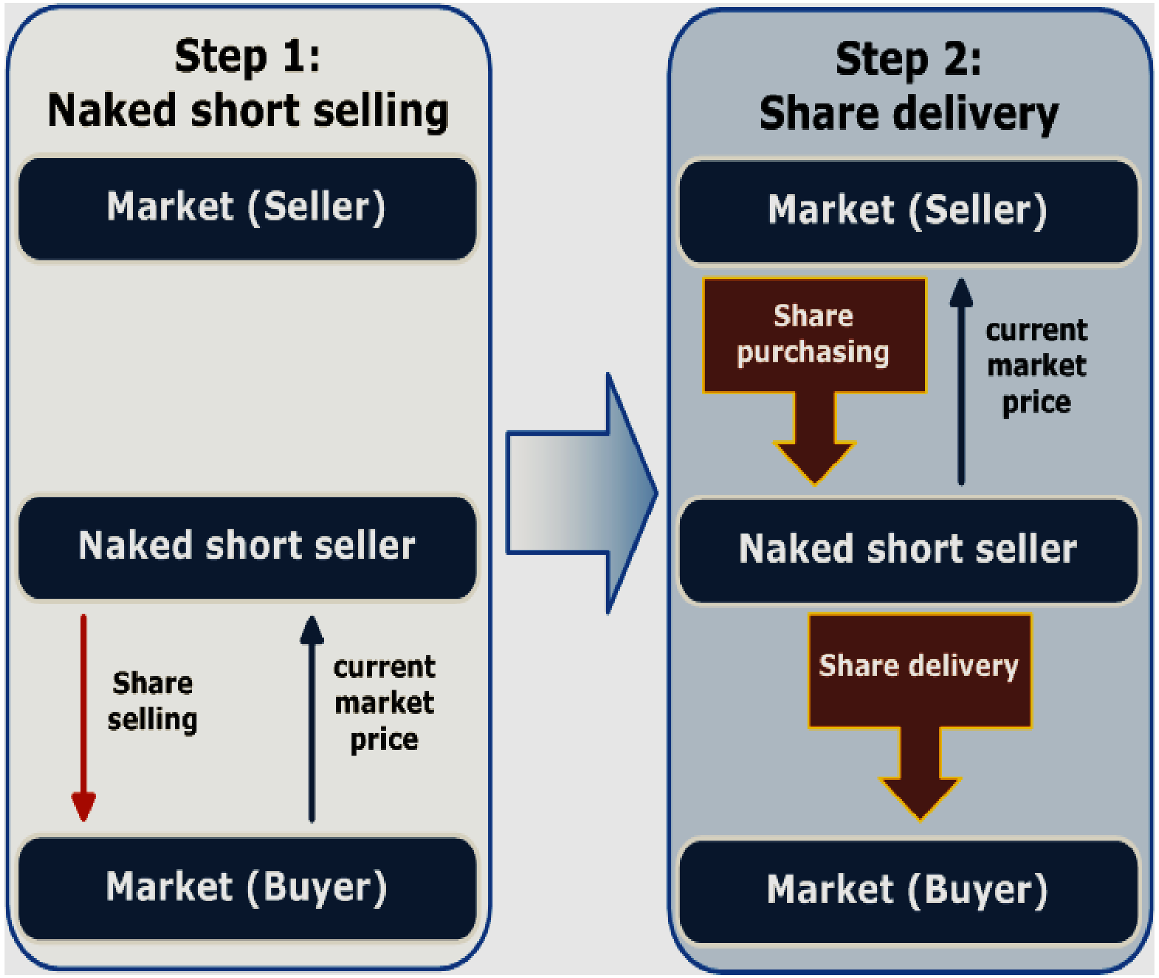
- Principe d'une vente à découvert (via un prêt de titres)
  - ***In the US, arranging to borrow a security before a short sale is called a <u>locate</u>***



Vente à découvert

- La vente à découvert nue n'est pas précédée d'un emprunt de titre
  - *Elle est plutôt pratiquée par les market makers*
  - *Ceux-ci doivent se procurer le titre avant la date de livraison prévue*
    - Antérieurement, J+3 sur les marchés d'actions US

Naked short selling
Vente à découvert nue

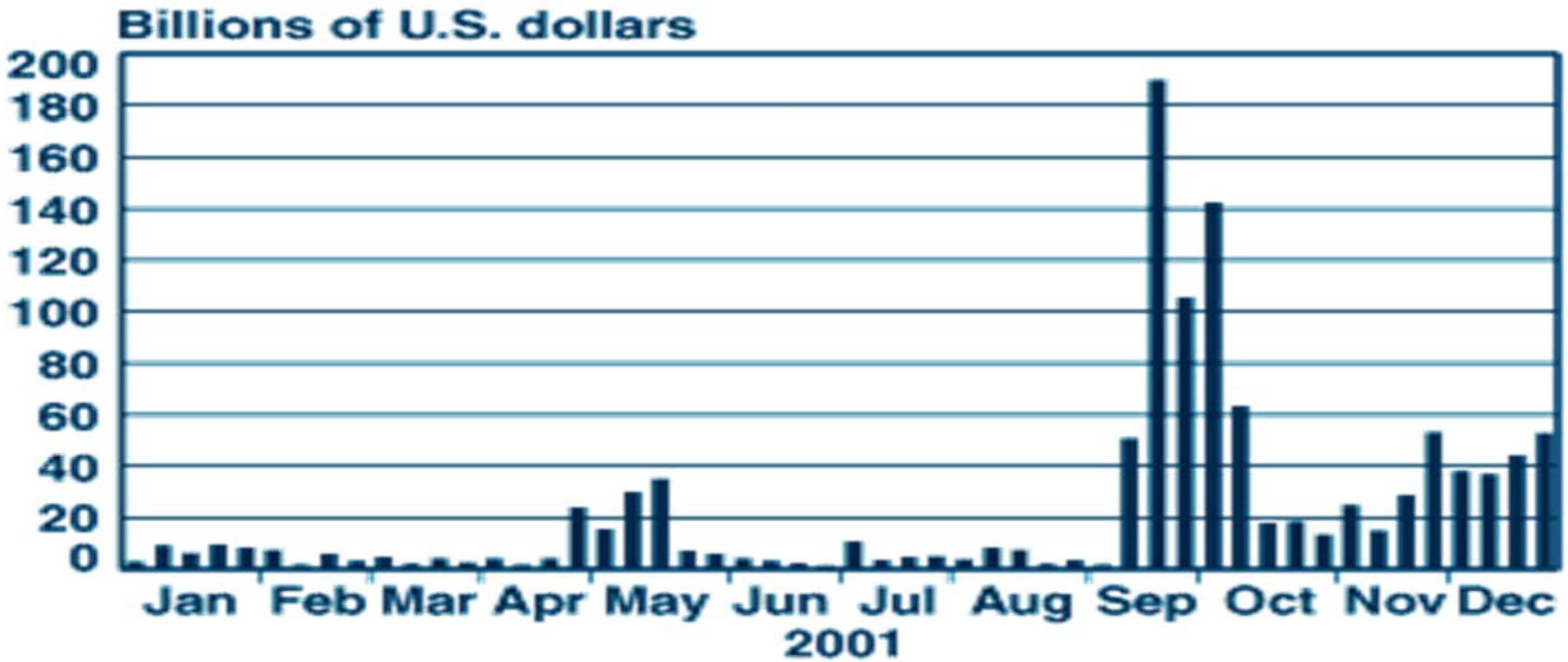


Vente à découvert

- Fails to deliver
  - *Titre promis à l'acheteur non fourni par le vendeur*
  - *Strategic fail : action délibérée de ne pas rendre le titre*
    - Gestion de la liquidité
  - *Aux États-Unis, amende en cas de « fail to deliver »*
    - Abusive naked short selling
    - Réglementation évolutive et complexe
  - *Suivi par la SEC http://www.sec.gov/foia/docs/failsdata.htm*
- Uptick rule
  - *Vente à découvert autorisée uniquement à un cours limite supérieur au meilleur prix acheteur*
    - Cette règle a connu plusieurs évolutions sur les marchés d'actions américaines

Vente à découvert

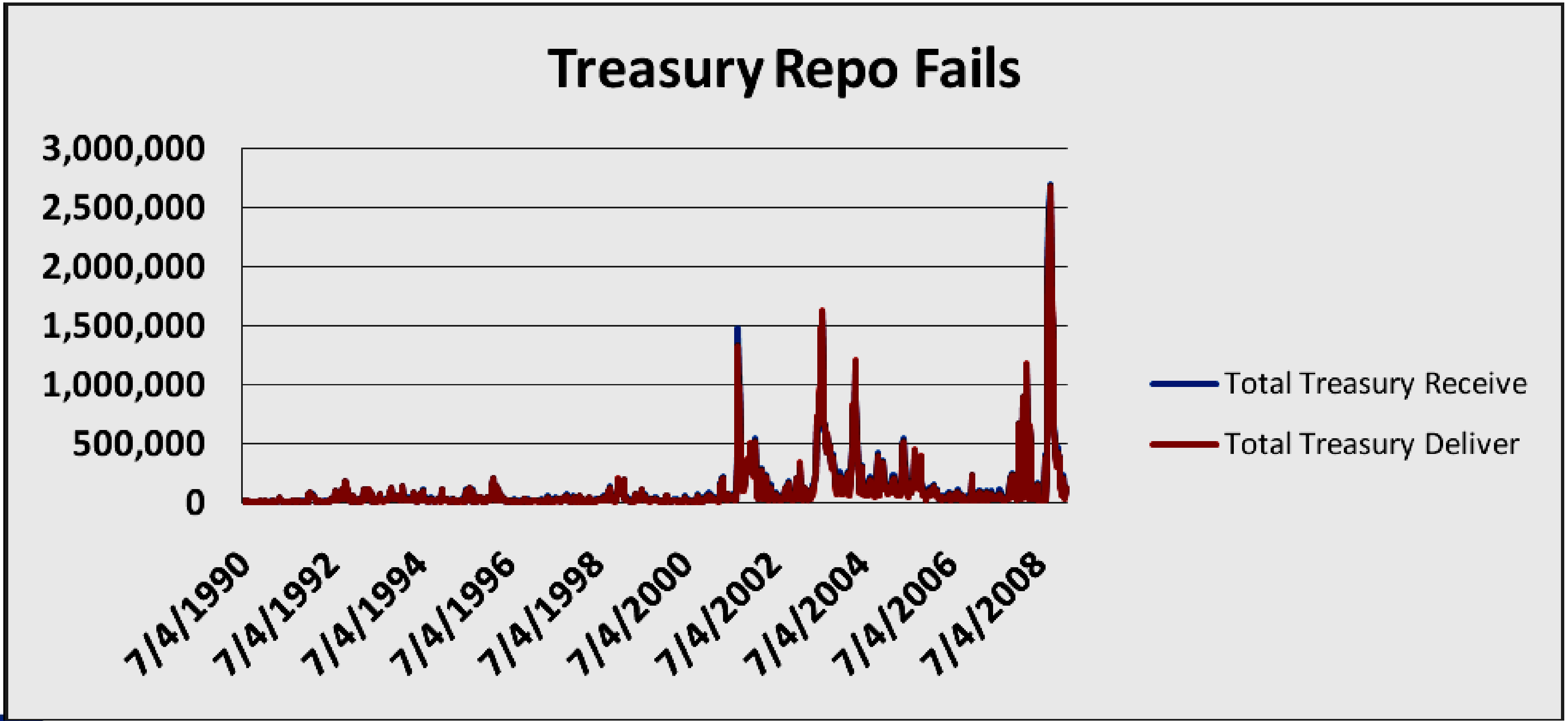
- *Après les attentats du 11 septembre 2001, beaucoup de vendeurs d'obligations du Trésor américain ont manqué à leur obligation de livraison de titres à la date prévue*



- *Les montants des titres non livrés sont passés de 1,7 milliards de $ par jour la semaine terminant le 5/9 à 190 milliards de dollars par jour la semaine se terminant le 19/9*

Vente à découvert

- Phénomène d'amplitude deux fois plus élevée au moment de la faillite de Lehman Brothers



Vente à découvert

- Vente à découvert et allocations négatives
  - *On cherche à donner du sens à l'expression* $R_p = XR_1 + (1 - X)R_2$ *avec* $X < 0$
  - *On note* $P_{i,t}$ *le prix du titre i à la date t*
    - Pour simplifier, pas de dividendes
  - *On dispose de 100 à investir, comment allouer* $X = -20\%$ *dans l'actif 1 ?*
    - On se fait prêter 20 de titres 1 que l'on revend en $t = 0$
    - En $t = 1$, on les rachète d'où un gain de $\frac{20}{P_{1,0}} \times \left(P_{1,0} - P_{1,1}\right)$
    - $\frac{20}{P_{1,0}}$ est le nombre de titres 1 vendus à découvert
    - Le gain sur la vente à découvert est donc de $-20 \times R_1$

Vente à découvert

- Vente à découvert et allocations négatives (suite et fin)
  - *On dispose de 100 à investir, comment allouer $X = -20\%$ dans l'actif 1 ?*
    - On dispose de $100 + 20$ à investir dans l'actif 2, les 20 venant de la vente des actifs 1 en $t = 0$
    - Ceci génère un gain de $\frac{120}{P_{2,0}} \times \left(P_{2,1} - P_{2,0}\right) = 120 \times R_2$ en $t = 1$
    - Le gain total est donc de $-20 \times R_1 + 120 \times R_2$
    - Rapporté à une richesse initiale de 100, le taux de rentabilité est donc de $-20\% \times R_1 + 120\% \times R_2$
    - D'où la justification de $XR_1 + (1 - X)R_2$ avec $X < 0$

Vente à découvert

- Ne pas vendre (à découvert) la peau de l’ours avant de l’avoir tué ; en anglais :
  - *Don’t count your chickens before they’re hatched*

Bear market : marché baissier

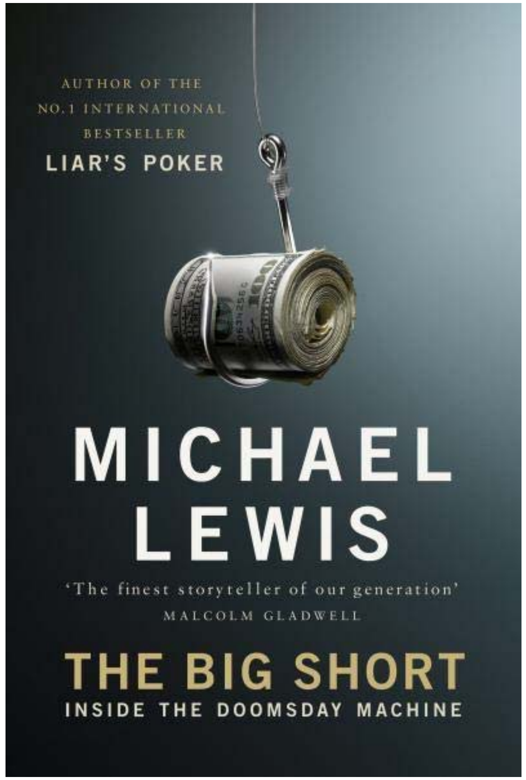
Bull market : marché haussier

Les stratégies de vente à découvert sont gagnantes dans des marchés baissiers

UNIVERSITÉ PARIS 1 – PANTHÉON - SORBONNE –

Vente à découvert

- À propos des ventes à découvert et de la crise de 2008



http://www.youtube.com/watch?v=gWAt8-X4Kx8

http://www.youtube.com/watch?v=taIzhDYmQTA&feature=related

Vente à découvert

- Règlement livraison sur le compartiment européen de NYSE Euronext
- Depuis septembre 2000, les valeurs se négocient au comptant
  - *Transfert de la propriété du titre le jour de la négociation*
  - *Paiement en espèces et livraison des titres trois jours ouvrés après la négociation (J+3)*
- Toutefois, sur certaines valeurs, les intermédiaires peuvent proposer à leurs clients un service de règlement différé (SRD)
  - *Valeurs éligibles au SRD*
    - Appartenance à l'indice SBF120 ou capitalisation boursière > 1 milliard € et et volume transaction quotidien > 1million €

Vente à découvert

Service de règlement différé

- Un ordre d'achat avec SRD exécuté au comptant sur le marché par le négociateur qui paie et est livré par le vendeur
  - *paiement différé par l'acheteur et livraison du titre au compte de ce dernier jusqu'au dernier jour de bourse du mois*
    - Dernier jour de bourse du mois : 5 jours ouvrés avant la fin du mois calendaire
  - *Le négociateur (l'intermédiaire) fait crédit à l'acheteur entre J+3 et la fin du mois boursier*
  - *Il s'agit donc d'un achat de titres à crédit*
    - Déjà analysé
  - *Le négociateur demande des garanties pour le prêt*

Vente à découvert

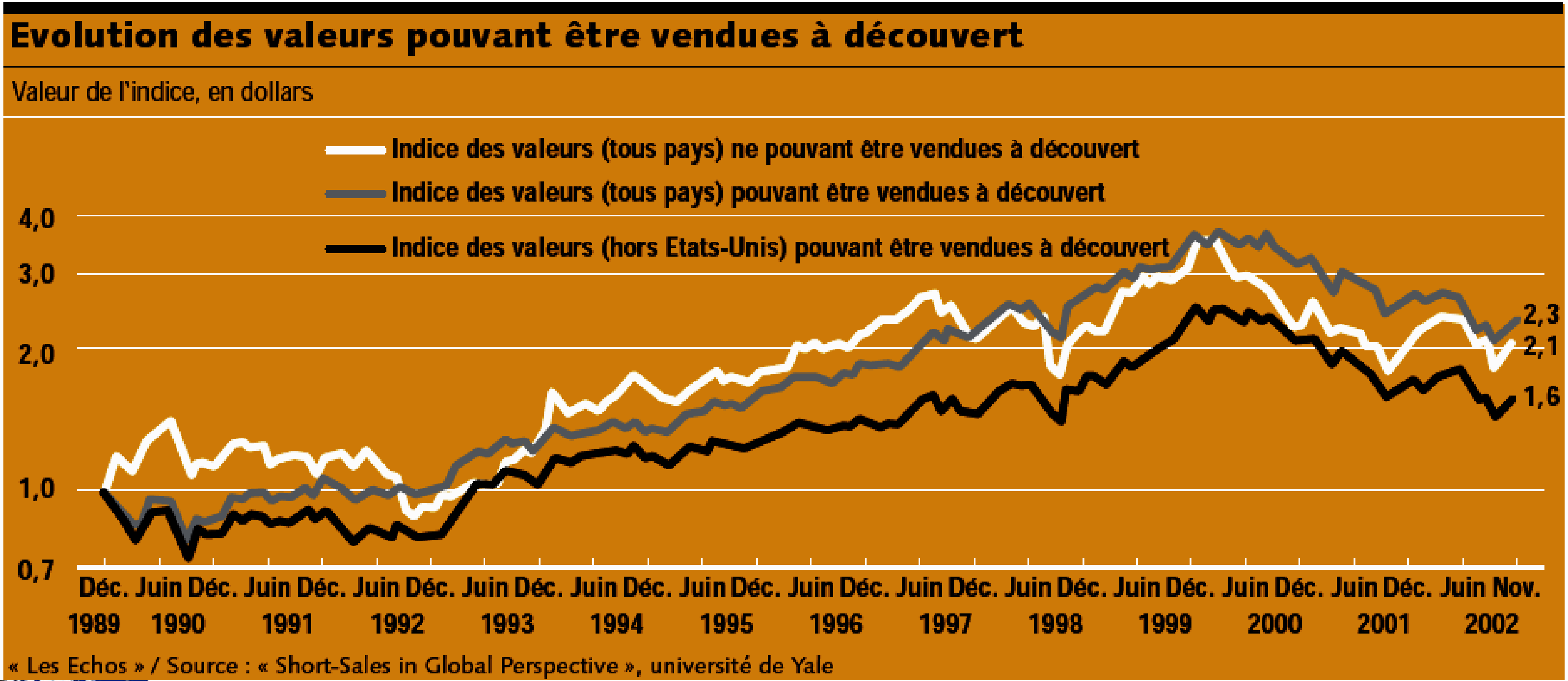
Service de règlement différé

- Inversement, un ordre de vente avec SRD est exécuté au comptant sur le marché par le négociateur
  - *qui livre l'acheteur et est payé,*
  - *mais qui diffère le paiement par le vendeur et le débit au compte titres de celui-ci jusqu'au dernier jour de bourse du mois*
- Ceci permet de <u>vendre à découvert</u>
  - *Short selling*

Ne pas confondre short selling et selling shorts

Vente à découvert

- L'interdiction des ventes à découvert est un signal négatif
- Peut limiter les manipulations de cours
- Pas d'effet clair sur le long terme



Source : Les Echos, 20 oct. 2008

Exercices complémentaires corrigés

- *Tirés des partiels des années passées*

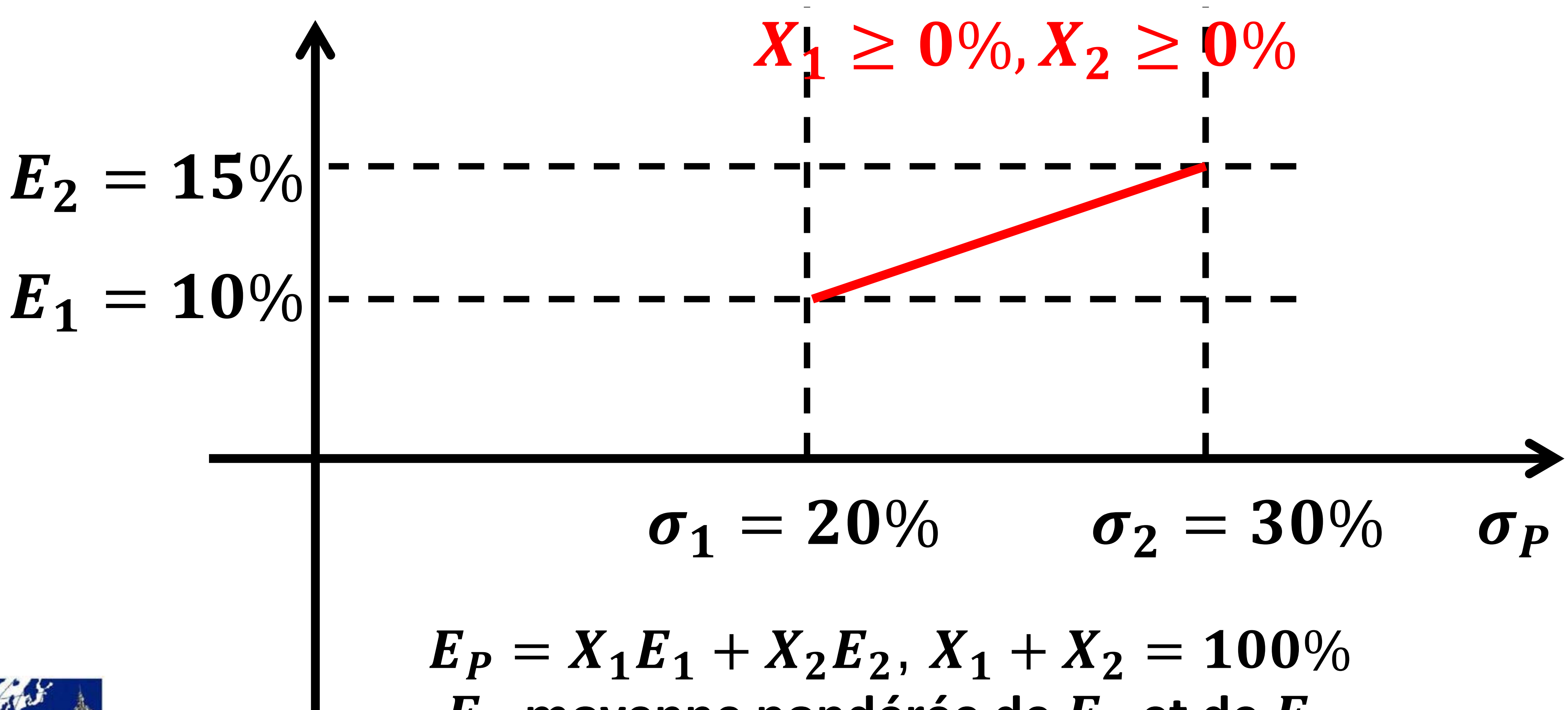
- Vente à découvert : $\boldsymbol{\rho_{12} = +1}$
- Portefeuille de variance minimale
- Corrélations parfaites – arbitrage
- $\boldsymbol{\rho_{12} = -1}$
- Trois actifs, corrélations parfaites, pas de vente à découvert
- À venir exercice de synthèse commencé le 17 octobre

Exercice : vente à découvert : $\boldsymbol{\rho_{12} = +1}$

- Problème : titres avec des rentabilités parfaitement corrélés
  - *Deux titres* $\mathbf{1, 2}$
  - *Espérances de rentabilités :* $\boldsymbol{E_1 = 10\%, E_2 = 15\%}$
  - *Écart-types des rentabilités* $\boldsymbol{\sigma_1 = 20\%, \sigma_2 = 30\%}$
  - *Coefficient de corrélation entre les rentabilités :* $\boldsymbol{\rho_{12} = +1}$
  - *A) Représenter graphiquement dans le plan* $(\boldsymbol{E_P, \sigma_P})$ *(écart-type des rentabilités en abscisse, espérance des rentabilités en ordonnée), l'ensemble des portefeuilles formés des titres* $\mathbf{1}$ *et* $\mathbf{2}$. *On suppose qu'on ne peut vendre à découvert aucun des deux titres.*
  - *B) Représenter dans le plan* $(\boldsymbol{E_P, \sigma_P})$*, l'ensemble des portefeuilles formés des titres* $\mathbf{1}$ *et* $\mathbf{2}$. *On ne peut vendre à découvert* $\mathbf{2}$*, mais c'est possible pour* $\mathbf{1}$

Exercice : vente à découvert : $\boldsymbol{\rho_{12} = +1}$

- A) On suppose qu'on ne peut vendre à découvert aucun des deux titres.

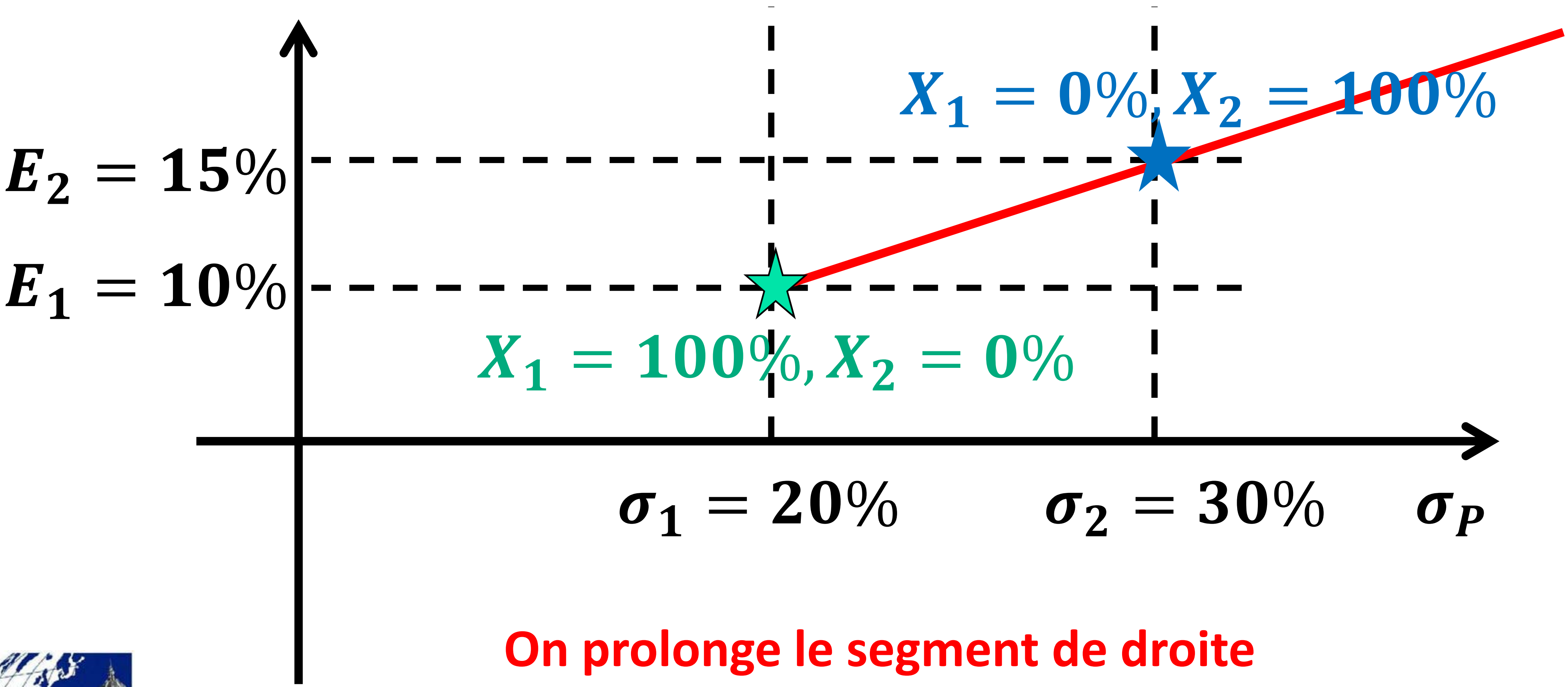


$$E_P = X_1 E_1 + X_2 E_2,\ X_1 + X_2 = 100\%$$

E_P **moyenne pondérée de** E_1 **et de** E_2

Exercice : vente à découvert : $\rho_{12} = +1$

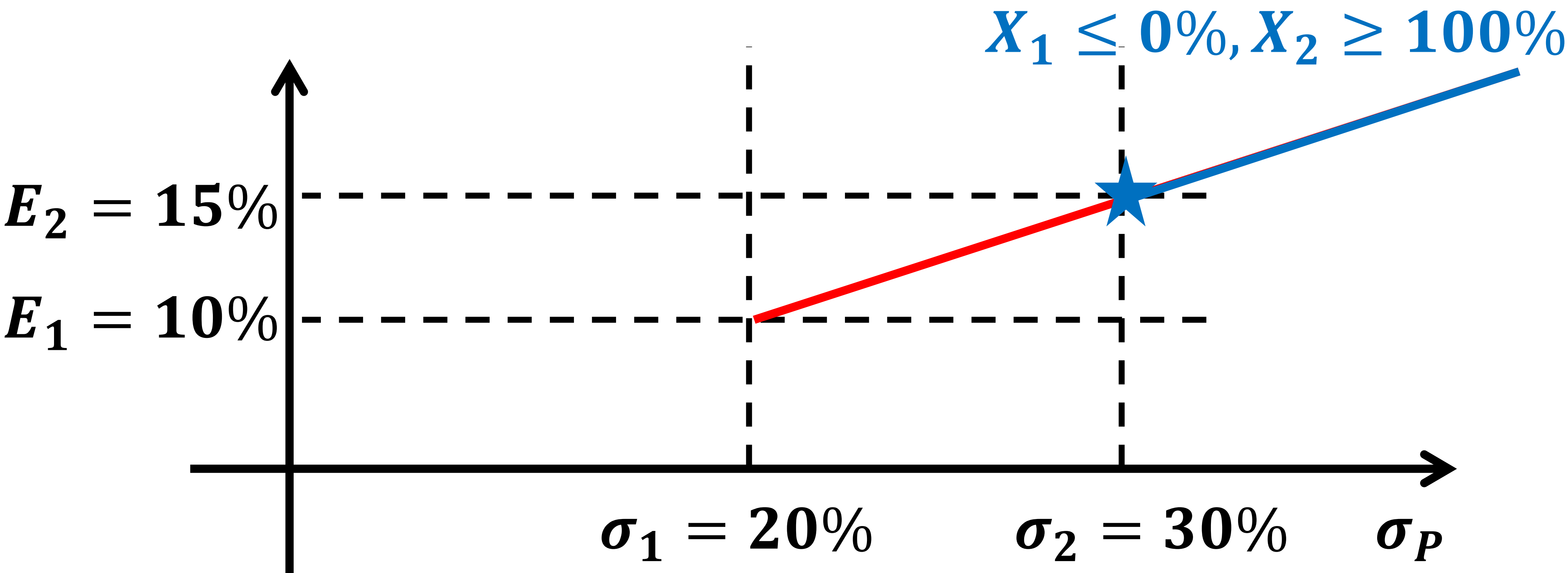
- B) On ne peut vendre à découvert **2**, mais c'est possible pour **1**



On prolonge le segment de droite précédent vers la droite

Exercice : vente à découvert : $\boldsymbol{\rho_{12} = +1}$

- B) On ne peut vendre à découvert **2**, mais c'est possible pour **1**



$$E_P = 10\% + X_2 \times 5\%$$

Exercice : vente à découvert : $\boldsymbol{\rho_{12} = +1}$

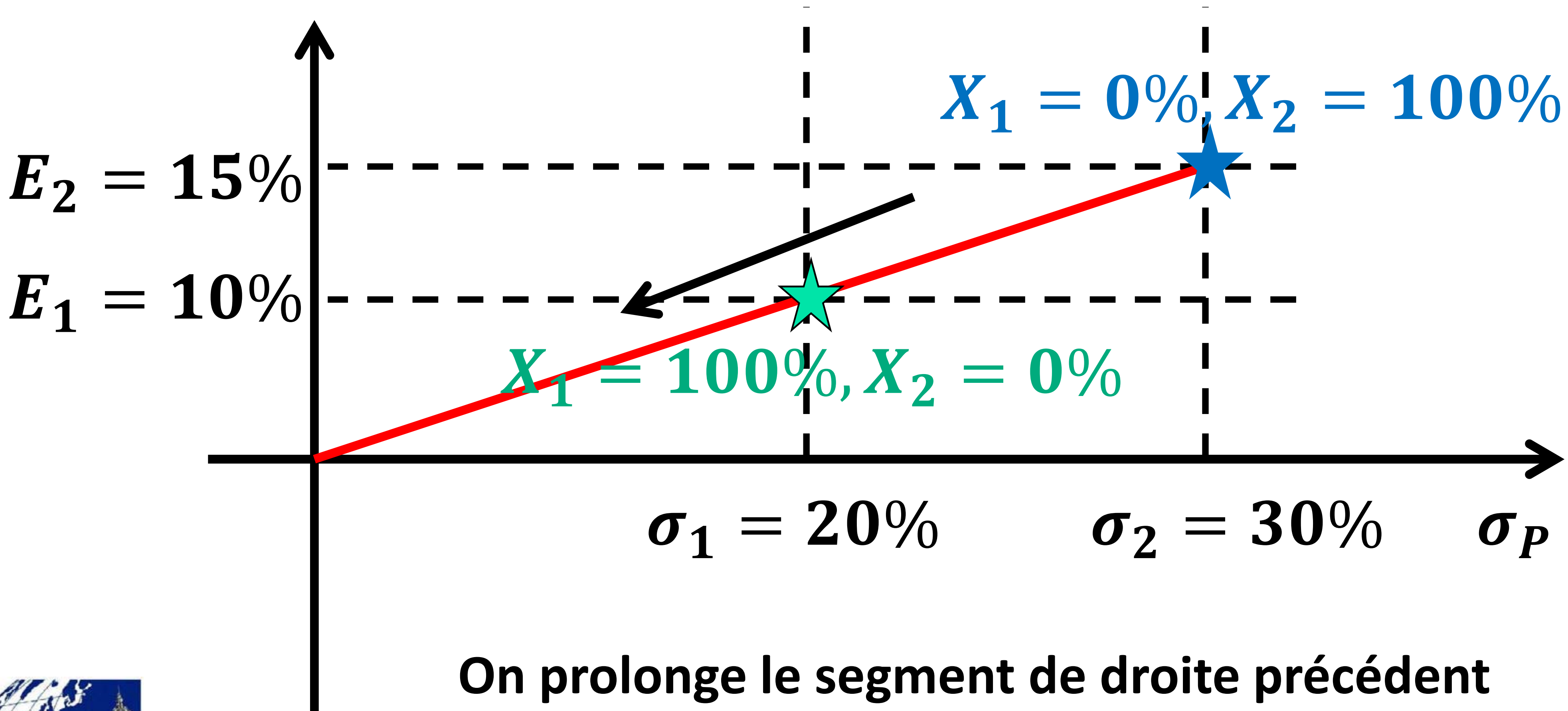
- Pour résoudre le problème B), il faut se souvenir que
  - *Quand le coefficient de corrélation est égal à* $\mathbf{+1}$ *ou à* $\mathbf{-1}$, *on a affaire à des segments de droites ou à des demi-droites*
  - $\boldsymbol{E_P = X_1 E_1 + X_2 E_2 = (1 - X_2) \times 10\% + X_2 \times 15\%}$
  - $\boldsymbol{E_P = 10\% + X_2 \times 5\%}$
  - *Interdiction de vendre à découvert le titre* $\mathbf{2}$, $\boldsymbol{X_2 \geq 0}$
  - $\boldsymbol{X_2 \geq 0 \Leftrightarrow E_P \geq 10\% = E_1}$
  - *L'espérance des rentabilités des portefeuilles,* $\boldsymbol{E_P}$, *est toujours supérieure à l'espérance de rentabilité du titre* $\mathbf{1}$
  - *La demi-droite en bleu correspond aux cas où le titre* $\mathbf{1}$ *est vendu à découvert (*$\boldsymbol{X_1 \leq 0\%}$*) et où* $\boldsymbol{X_2 \geq 100\%}$

Exercice : vente à découvert : $\boldsymbol{\rho_{12} = +1}$

- Titres avec des rentabilités parfaitement corrélés (suite)
  - *C) On suppose que l'on peut vendre à découvert le titre* **2** *mais pas le titre* **1**. *Représenter dans le plan* $(\boldsymbol{E_P}, \boldsymbol{\sigma_P})$, *l'ensemble des portefeuilles formés des titres* **1** *et* **2**.
  - *On reprend des éléments de l'analyse précédente, mais il y a une difficulté supplémentaire*
  - *Commençons par ce qui est similaire au cas précédent*
  - *Contrainte d'absence de vente à découvert de* **1** *:* $\boldsymbol{X_1 \geq 0}$
  - $\boldsymbol{E_P = X_1 E_1 + X_2 E_2 = X_1 E_1 + (1 - X_1) E_2 = E_2 + X_1 \times (E_1 - E_2)}$
  - $\boldsymbol{E_P = 15\% - X_1 \times 5\%}$
  - $\boldsymbol{X_1 \geq 0 \Leftrightarrow E_P \leq 15\%}$

Exercice : vente à découvert : $\boldsymbol{\rho_{12} = +1}$

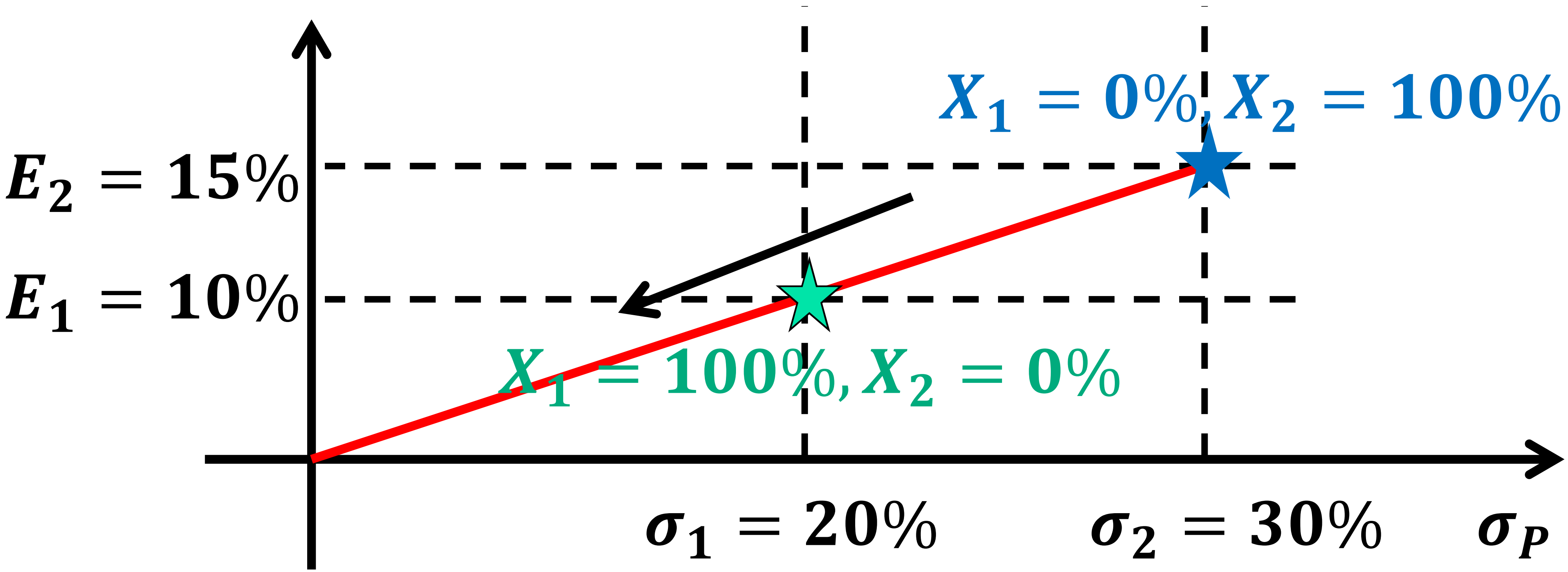
- C) On suppose que l'on peut vendre à découvert le titre **2** mais pas le titre **1**.



On prolonge le segment de droite précédent vers la gauche $X_1 \geq 0 \Leftrightarrow E_P \leq 15\%$

Exercice : vente à découvert : $\boldsymbol{\rho_{12} = +1}$

- C) On suppose que l'on peut vendre à découvert le titre **2** mais pas le titre **1**.



À chaque valeur de X_1 est associé un point sur le segment de droite rouge

En augmentant X_1, on se déplace dans le sens de la flèche

Exercice : vente à découvert : $\boldsymbol{\rho_{12} = +1}$

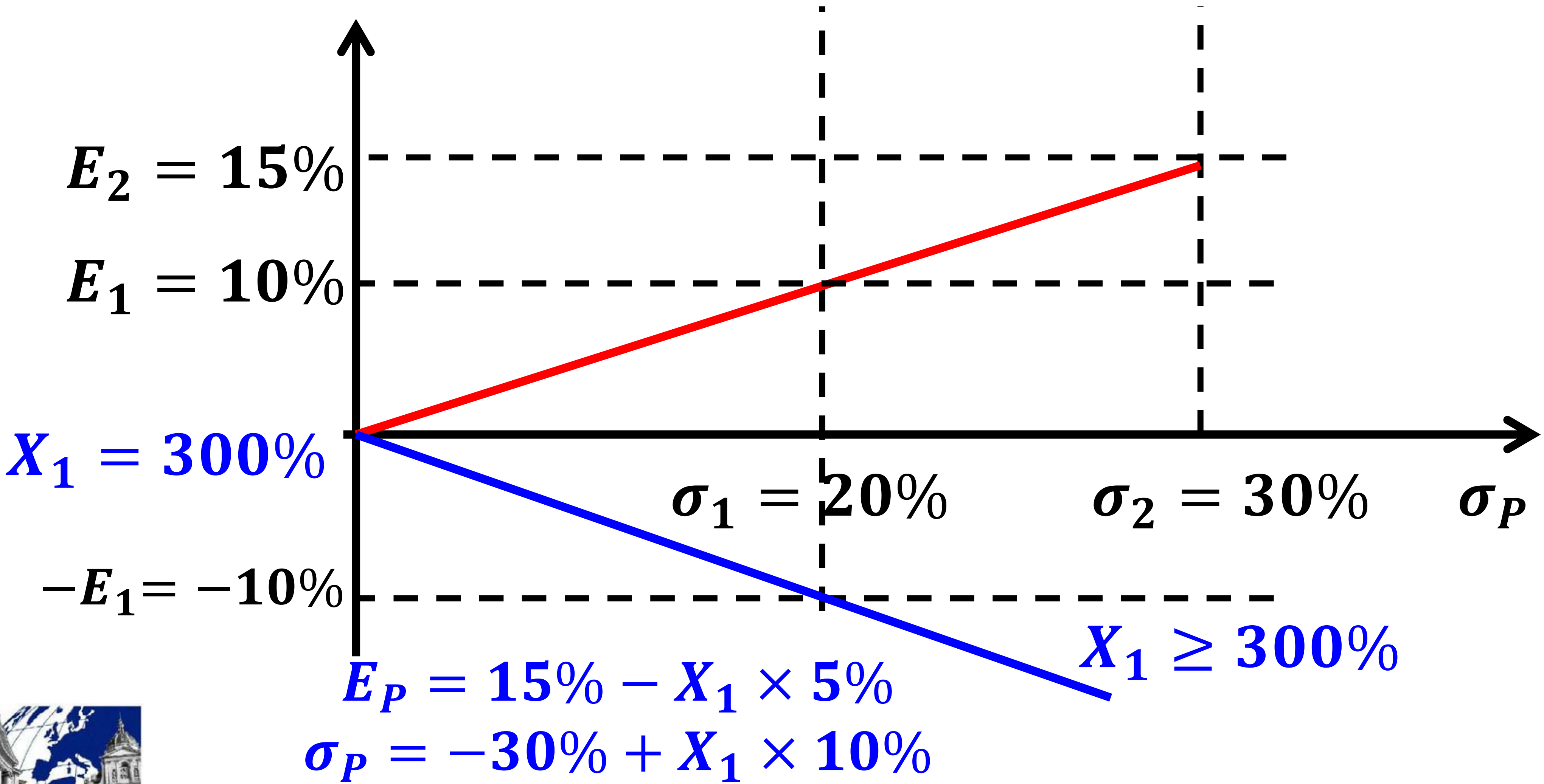
- C) On suppose que l'on peut vendre à découvert le titre **2** mais pas le titre **1**.
  - *En prolongeant le segment de droite précédent vers la gauche, on obtient une espérance de rentabilité égale à* **0**
  - $\boldsymbol{E_P = 15\% - X_1 \times 5\%}$
  - *Pour* $\boldsymbol{X_1 = 300\% \geq 0}$, $\boldsymbol{E_P = 0}$
  - *On peut voir sur le graphique qu'alors* $\boldsymbol{\sigma_P = 0}$
  - *Ceci provient de* $\boldsymbol{E_2/E_1 = \sigma_2/\sigma_1 = 1,5}$
  - *Autre approche : quand* $\boldsymbol{\rho_{12} = +1}$
  - $\boldsymbol{\sigma_P = |X_1\sigma_1 + X_2\sigma_2| = |X_1\sigma_1 + (1 - X_1)\sigma_2|}$
  - $\boldsymbol{\sigma_P = |\sigma_2 + X_1(\sigma_1 - \sigma_2)| = |30\% - X_1 \times 10\%|}$
  - $\boldsymbol{X_1 = 300\% \Rightarrow \sigma_P = 0\%}$

Exercice : vente à découvert : $\boldsymbol{\rho_{12} = +1}$

- C) On suppose que l'on peut vendre à découvert le titre **2** mais pas le titre **1**.
  - *Remarque*
    - On a ainsi formé un portefeuille tel que $\boldsymbol{E_P = 0}$, $\boldsymbol{\sigma_P = 0}$
    - Actif sans risque/dépôt à vue non rémunéré sans risque de défaut
  - *On a vu en cours que l'ensemble des portefeuilles constitués de* **1** *et de* **2** *pouvait être formé de deux demi-droites*
    - Ici, si $\boldsymbol{X_1 \geq 300\%}$,
    - $\boldsymbol{E_P = 15\% - X_1 \times 5\% \leq 0}$
    - $\boldsymbol{\sigma_P = |30\% - X_1 \times 10\%|}$
    - $\boldsymbol{X_1 \geq 300\%, 30\% - X_1 \times 10\% \leq 0}$
    - $\boldsymbol{\sigma_P = -30\% + X_1 \times 10\%}$

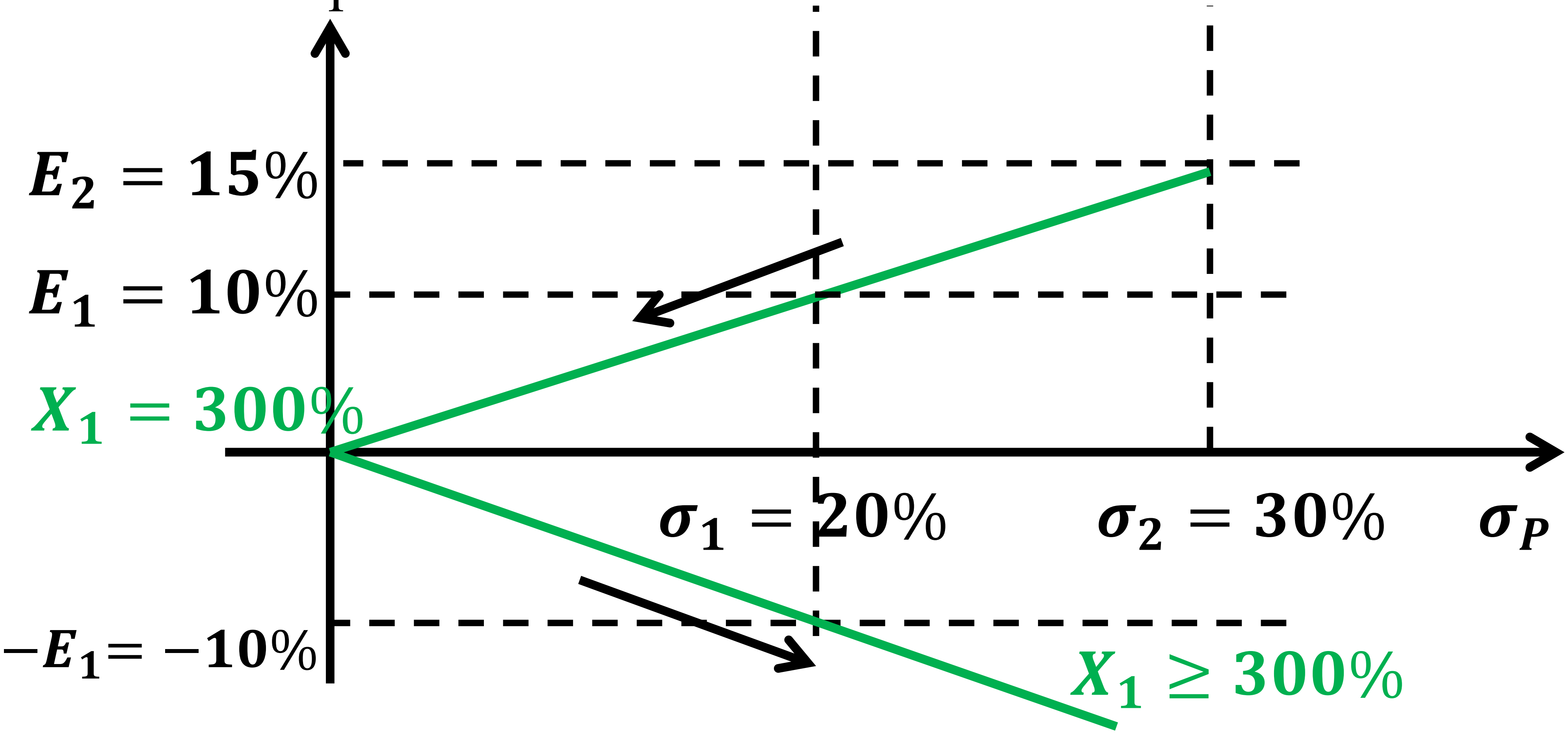
Exercice : vente à découvert : $\boldsymbol{\rho_{12} = +1}$

- C) On suppose que l'on peut vendre à découvert le titre **1** mais pas le titre **2**.



Exercice : vente à découvert : $\boldsymbol{\rho_{12} = +1}$

- C) On suppose que l'on peut vendre à découvert le titre **2** mais pas le titre **1**.



À chaque valeur de X_1 est associé un point

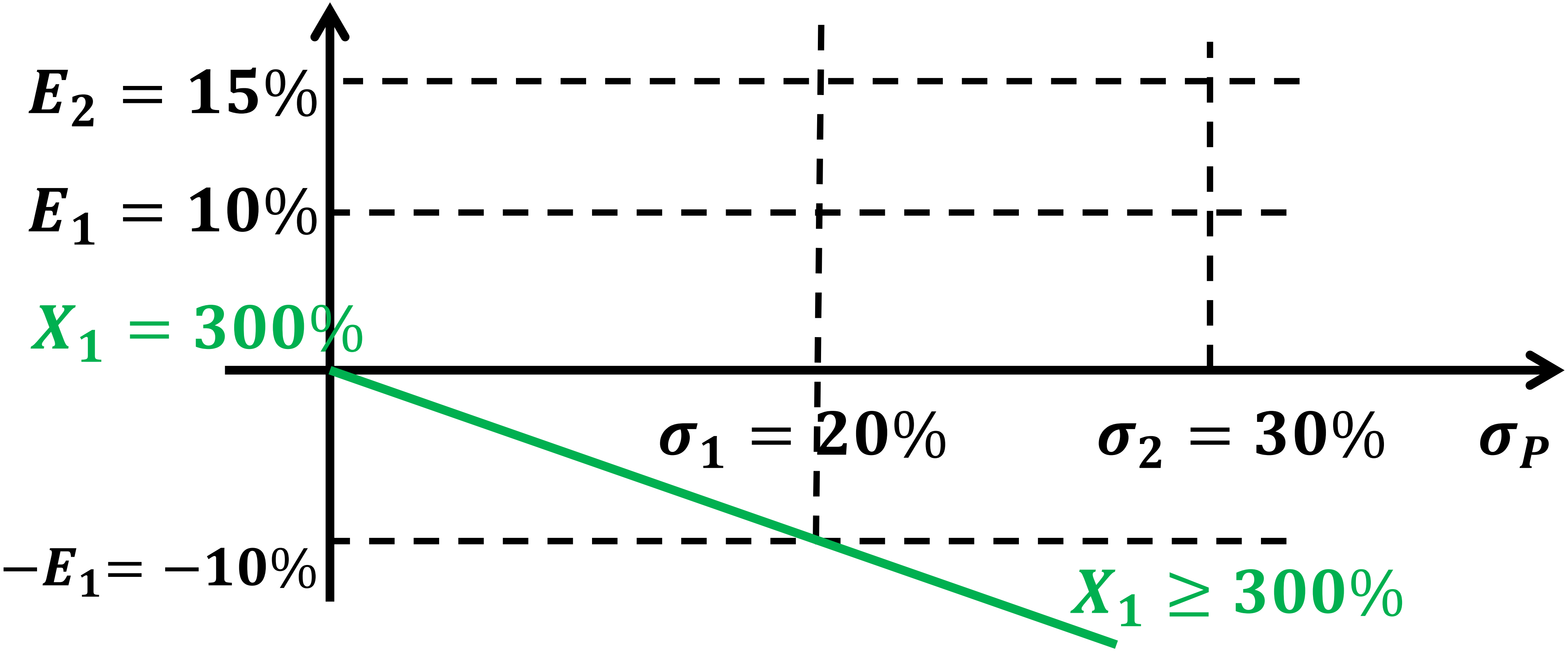
En augmentant X_1, on se déplace dans le sens de la flèche

Exercice : vente à découvert : $\boldsymbol{\rho_{12} = +1}$

- D) Ensemble des portefeuilles formés des titres **1** et **2** qui ne sont jamais choisis par les investisseurs

Exercice : vente à découvert : $\rho_{12} = +1$

D) Ensemble des portefeuilles formés des titres **1** et **2** qui ne sont jamais choisis par les investisseurs ayant des préférences moyenne-variance



Tous les titres sur la demi-droite en vert sont dominés par l'actif sans risque / dépôt à vue non rémunéré

Exercice : portefeuille de variance minimale

Cet exercice nécessite de savoir trouver le minimum d'une fonction

- Problème : portefeuille de variance minimale
  - *On considère deux titres risqués* $\mathbf{1, 2}$
  - *Espérances des rentabilités :* $\boldsymbol{E_1, E_2}$
  - *Écart-types des rentabilités* $\boldsymbol{\sigma_1, \sigma_2}$
  - *Coefficient de corrélation entre les rentabilités* $\boldsymbol{\rho}$
- A)Variance du portefeuille
  - $\boldsymbol{X_1, X_2}$ *: fractions de la richesse allouées au titres* $\mathbf{1, 2}$
  - *Rappeler l'expression de la variance du portefeuille* $\boldsymbol{\sigma_P^2}$
  - *Dépend-elle des espérances de rentabilité ?*
  - *À quoi correspond la fonction* $\boldsymbol{X_1 \to \sigma_P^2(X_1)}$ *?*

Exercice : portefeuille de variance minimale

- Problème : portefeuille de variance minimale
  - $\boldsymbol{\sigma_P^2 = X_1^2\sigma_1^2 + 2\rho X_1 X_2 \sigma_1 \sigma_2 + X_2^2\sigma_2^2}$
  - *Où* $\boldsymbol{X_2 = 1 - X_1}$
  - $\boldsymbol{\sigma_P^2}$ *ne dépend pas de* $\boldsymbol{E_1, E_2}$
  - $\boldsymbol{\sigma_P^2(X_1)}$ *est un trinôme*
    - Polynôme du second degré de la forme $\boldsymbol{aX_1^2 + bX_1 + c}$
  - *Le graphe de la fonction* $\boldsymbol{X_1 \to \sigma_P^2(X_1)}$ *est une parabole*
- B) Minimum de $\boldsymbol{\sigma_P^2(X_1)}$, pas de contrainte de vente à découvert
  - *Trouver l'allocation* $\boldsymbol{X_1}$*, telle que la variance du portefeuille est minimale*
  - *Quand* $\boldsymbol{X_1}$ *devient-il négatif ?*

- PANTHÉON - SORBONNE -
UNIVERSITÉ PARIS 1

Exercice : portefeuille de variance minimale

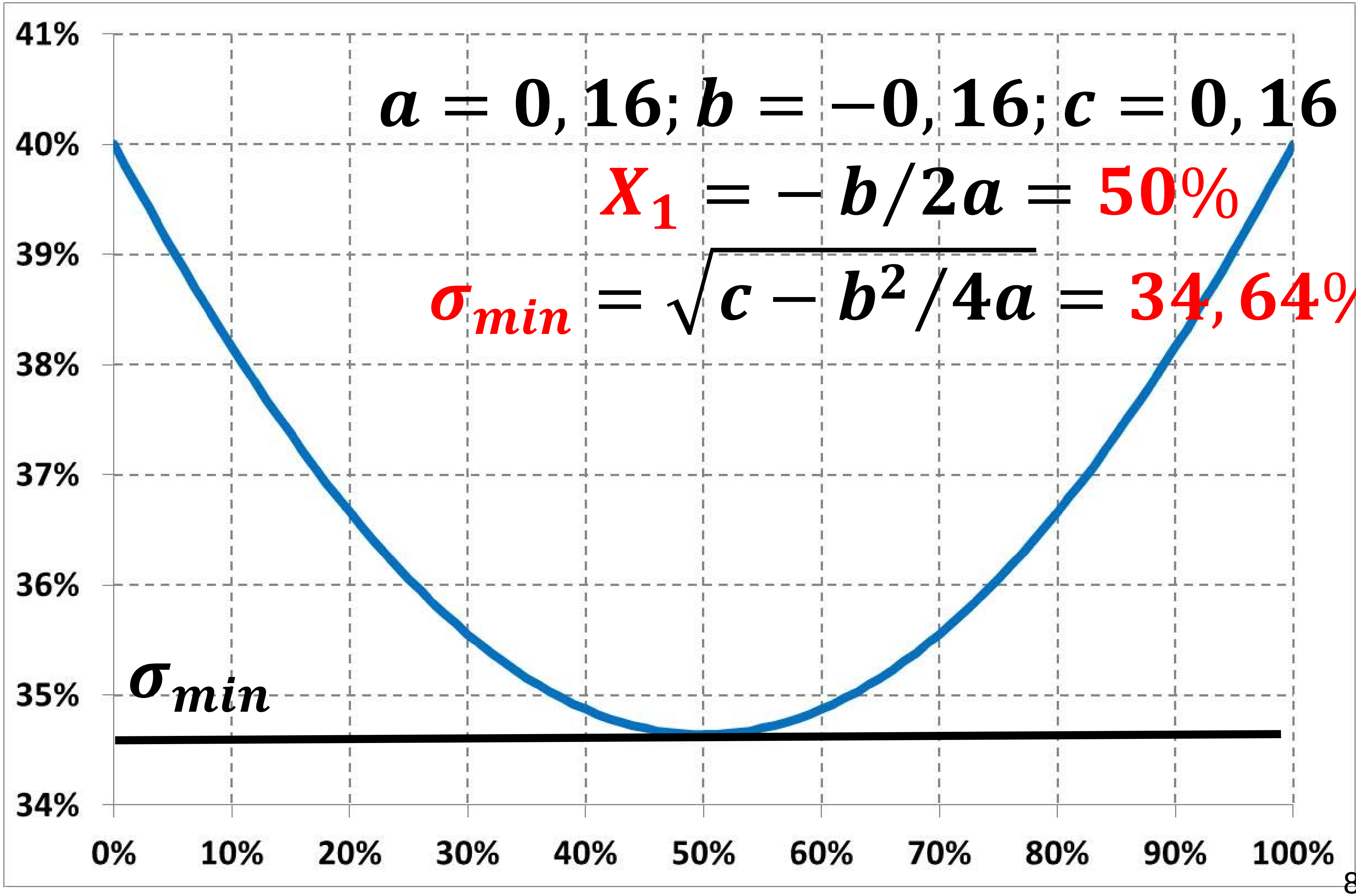
- Allocation $\boldsymbol{X_1}$ minimisant de $\boldsymbol{\sigma_P^2(X_1)}$
  - $\boldsymbol{\sigma_P^2(X_1) = X_1^2\sigma_1^2 + 2\rho X_1 X_2 \sigma_1 \sigma_2 + X_2^2 \sigma_2^2}$
    - Où $\boldsymbol{X_2 = 1 - X_1}$
  - $\boldsymbol{\sigma_P^2(X_1) = aX_1^2 + bX_1 + c}$
    - $\boldsymbol{a = \sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}$
    - $\boldsymbol{b = 2\rho\sigma_1\sigma_2 - 2\sigma_2^2}$
    - $\boldsymbol{c = \sigma_2^2}$
- Si $\boldsymbol{a > 0}$, $\boldsymbol{\sigma_P^2(X_1)}$ est minimal en $\boldsymbol{X_1 = -b/2a}$
    - Calcul de la dérivée de $\boldsymbol{\sigma_P^2(X_1)}$
    - $\boldsymbol{d\sigma_P^2(X_1)/dX_1 = 2aX_1 + b = 0 \Leftrightarrow X_1 = -b/2a}$
- $\boldsymbol{X_1 < 0 \Leftrightarrow b > 0 \Leftrightarrow \rho\sigma_1 > \sigma_2 \Leftrightarrow \beta_{1/2} > 1}$

Exercice : portefeuille de variance minimale

- Problème : portefeuille de variance minimale
  - *Minimum de $\boldsymbol{\sigma_P^2(X_1)}$, pas de contrainte de vente à découvert*
- C) Quel est le minimum de la variance du portefeuille ?
- Minimum de $\boldsymbol{\sigma_P^2(X_1)}$
  - $\boldsymbol{\sigma_P^2(X_1) = aX_1^2 + bX_1 + c}$
    - $\boldsymbol{a = \sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}$
    - $\boldsymbol{b = 2\rho\sigma_1\sigma_2 - 2\sigma_2^2}$
    - $\boldsymbol{c = \sigma_2^2}$
  - *Écriture de la forme canonique du trinôme*
  - $\boldsymbol{\sigma_P^2(X_1) = a(X_1 - b/2a)^2 + c - b^2/4a}$
- Le minimum de $\boldsymbol{\sigma_P^2(X_1)}$ est donc $\boldsymbol{c - b^2/4a = -\Delta/4a}$
  - *Où $\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4ac}$ est le discriminant du trinôme*

En bleu, $X_1 \to \sigma_P(X_1)$

$\sigma_1 = \sigma_2 = 40\%, \rho = 0,5$



Exercice : portefeuille de variance minimale

- Problème : portefeuille de variance minimale
- D) Il n’est maintenant plus possible de vendre à découvert le titre **1**. Quelle est l’impact de cette contrainte ?
  - *Il faut minimiser* $\boldsymbol{\sigma_P^2}(\boldsymbol{X_1})$ *sous la contrainte* $\boldsymbol{X_1} \geq \mathbf{0}$
  - *Si la contrainte n’est pas active, comme dans le cas précédent, où* $\boldsymbol{X_1} = \mathbf{50}\%$*, rien ne change*
  - *Si* $\boldsymbol{X_1} = -\boldsymbol{b}/\mathbf{2}\boldsymbol{a} < \mathbf{0}$ *ou de manière équivalente si* $\boldsymbol{\rho\sigma_1} > \boldsymbol{\sigma_2}$*, l’optimum précédent ne satisfait pas la contrainte de vente à découvert*
  - *On obtient alors le graphique suivant*
    - Allocation en abscisse
    - Écart-type des rentabilités du portefeuille en ordonnée

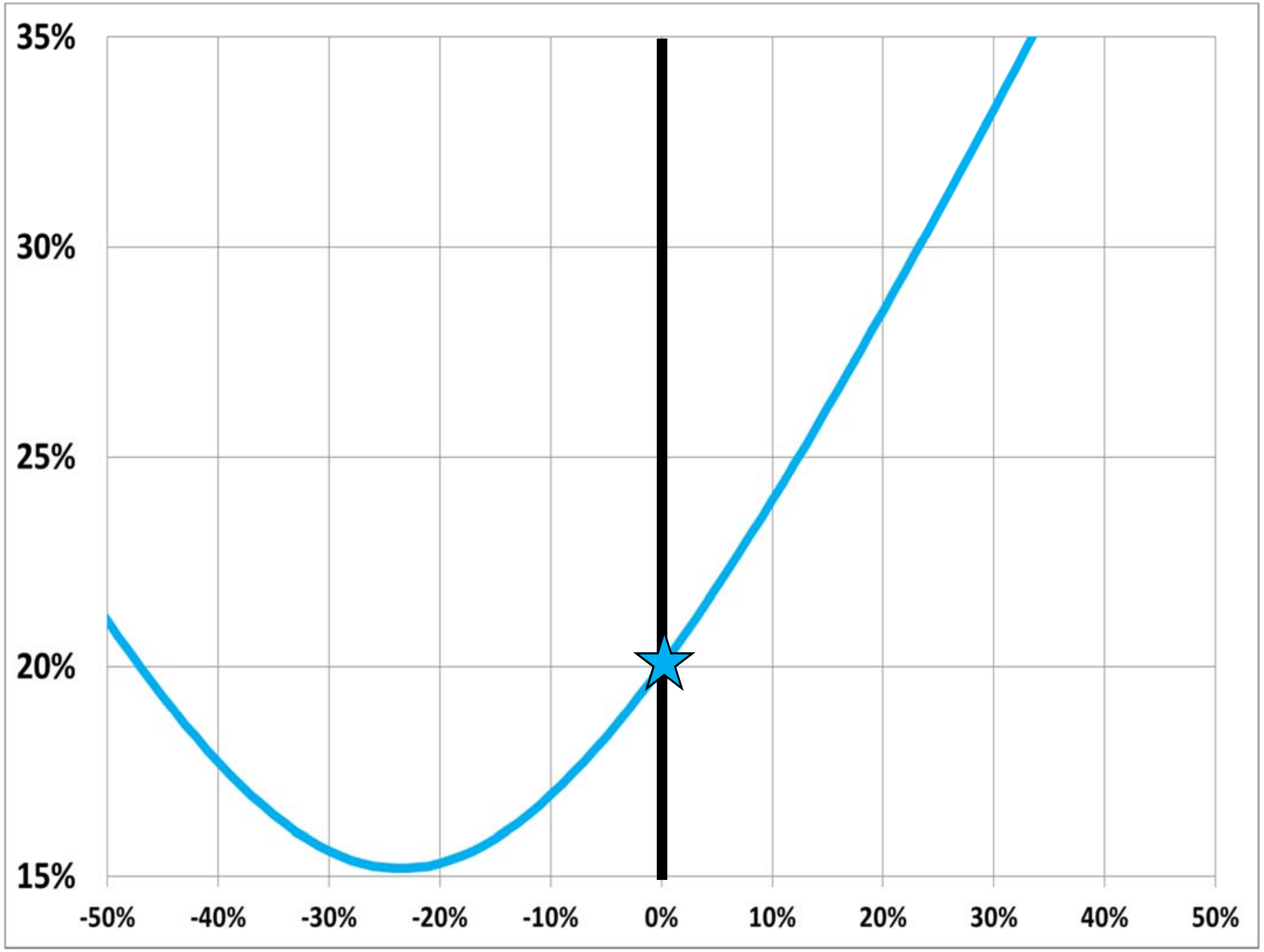
contrainte $X_1 \geq 0$

Exercice : portefeuille de variance minimale

- portefeuille de variance minimale : cas où $\rho\sigma_1 < \sigma_2$

Minimum de la variance obtenu pour $X_1 < 0$
À droite du point minimum, la variance croit avec X_1

Pour $X_1 \geq 0$,
$$\sigma_P^2(X_1) \geq \sigma_P^2(0)$$
le portefeuille de variance minimale est obtenu pour
$$X_1 = 0$$
Optimum en coin



Exercice : corrélations parfaites - arbitrage

- Examen du cas où des titres ou des portefeuilles de titres sont parfaitement corrélés
  - *Situation déjà examinée pour deux titres risqués*
  - *L'ensemble des portefeuilles constitués des deux titres en quantités positives est représenté par le segment de droite reliant les points associés à ces deux titres*
  - *Que se passe-t-il si on peut vendre à découvert ces deux titres ?*
- Dans le cas où on combine un actif sans risque et un titre risqué, l'ensemble des portefeuilles est représenté par une demi-droite
  - *Y a-t-il un lien avec le cas précédent ?*

Exercice : corrélations parfaites - arbitrage

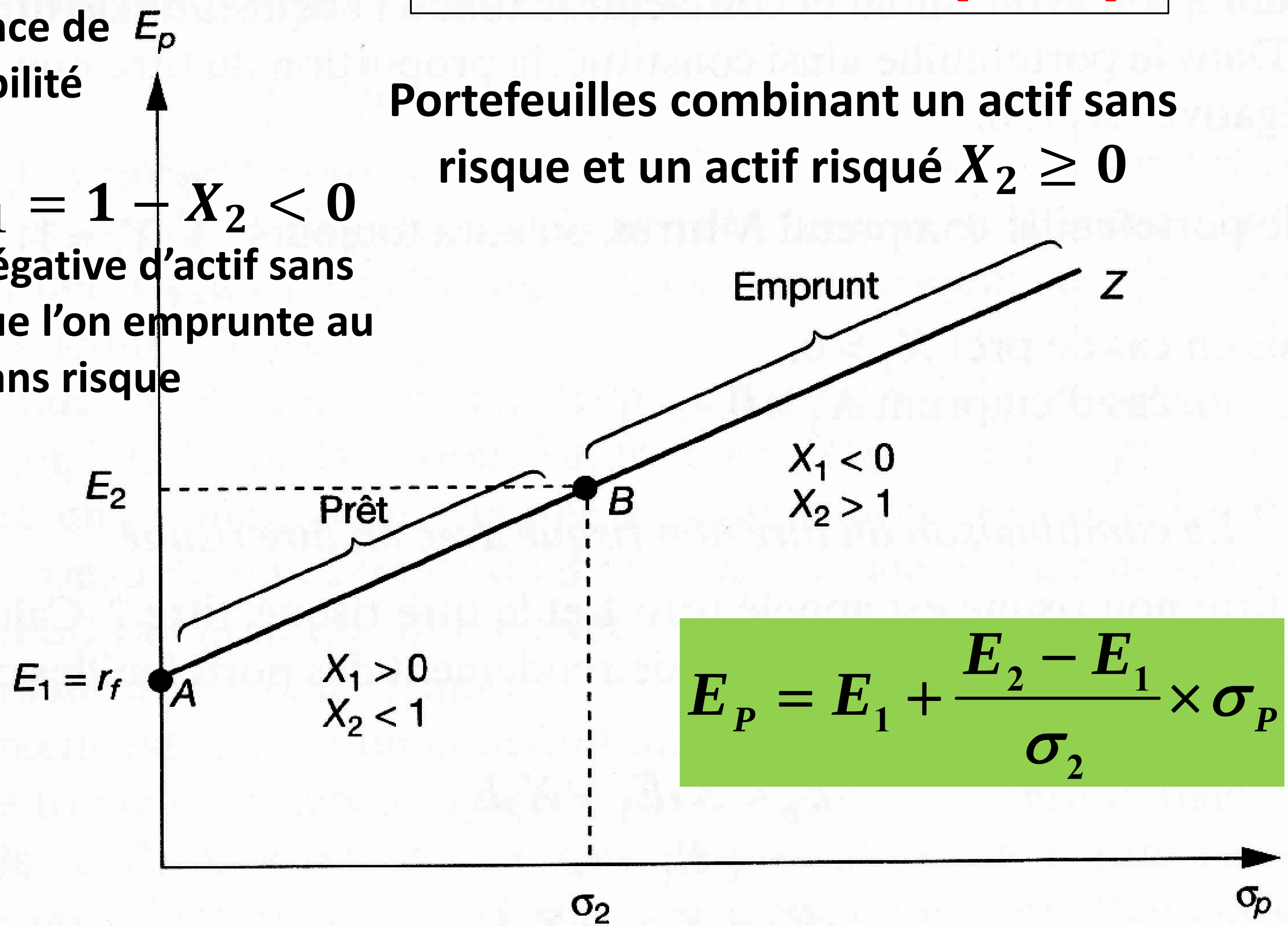
Graphique 2.10

Relation affine entre σ_P et E_P

Portefeuilles combinant un actif sans risque et un actif risqué $X_2 \geq 0$

$$X_2 > 1 \Rightarrow X_1 = 1 - X_2 < 0$$

Une quantité négative d'actif sans risque signifie que l'on emprunte au taux sans risque



$$E_P = E_1 + \frac{E_2 - E_1}{\sigma_2} \times \sigma_P$$

Exercice : corrélations parfaites - arbitrage

Le segment de droite reliant les points A et B représente l'ensemble des portefeuilles combinant les titres 1 et 2, en quantités positives, pour un niveau de corrélation égal à 1

- Corrélation $\rho_{12} = 1$
- **Segment de droite ?**

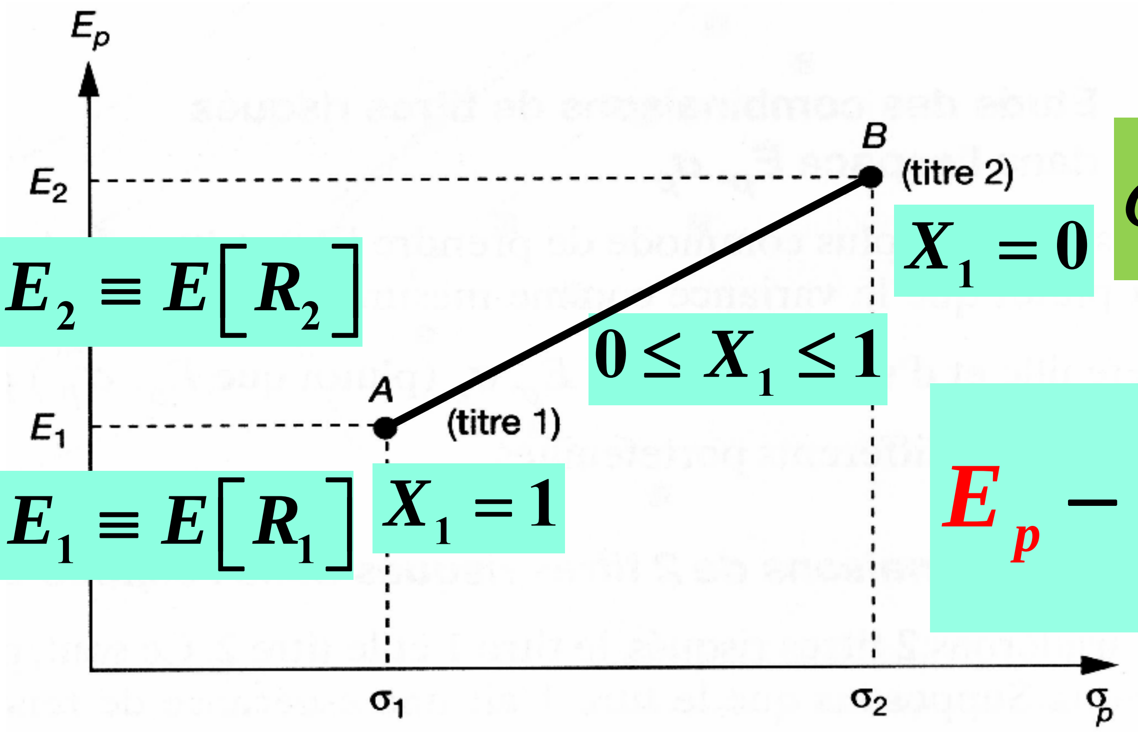
$$E_p = X_1 \times E\left[R_1\right] + \left(1 - X_1\right) \times E\left[R_2\right]$$

$$E_p - E_2 = X_1 \times \left(E_1 - E_2\right)$$

$$\sigma_P = X_1 \sigma_1 + \left(1 - X_1\right) \sigma_2$$

$$\sigma_P - \sigma_2 = X_1 \left(\sigma_1 - \sigma_2\right)$$

Espérance de rentabilité



$$E_2 \equiv E\left[R_2\right]$$

$$X_1 = 0$$

$$0 \le X_1 \le 1$$

$$E_1 \equiv E\left[R_1\right]$$

$$X_1 = 1$$

$$E_p - E_2 = \left(\sigma_P - \sigma_2\right) \times \frac{E_1 - E_2}{\sigma_1 - \sigma_2}$$

Écart-type de la rentabilité

Relation affine entre espérance de rentabilité et écart-type des rentabilités

Exercice : corrélations parfaites - arbitrage

$\rho_{12} = +1$

- Etude du cas $\boldsymbol{\rho_{12} = +1}$
  - *Fraction de la richesse investie dans le titre 1 :* $\boldsymbol{X_1 = X}$
  - *Rentabilité du portefeuille* $\boldsymbol{R_P = XR_1 + (1 - X)R_2}$
  - *Espérances des rentabilités* $\boldsymbol{E_1 = E[R_1], E_2 = E[R_2]}$

$$E\left[R_P\right] = E_P = XE\left[R_1\right] + \left(1 - X\right)E\left[R_2\right] = E_2 + X\left(E_1 - E_2\right)$$

  - *Variance des rentabilités :*

$$\mathrm{Var}\left[R_P\right] = \sigma_P^2 = X^2\sigma_1^2 + 2\rho_{12}X\left(1 - X\right)\sigma_1\sigma_2 + \left(1 - X\right)^2\sigma_2^2$$

$$\sigma_P^2 = X^2\sigma_1^2 + 2X\left(1 - X\right)\sigma_1\sigma_2 + \left(1 - X\right)^2\sigma_2^2$$

$$\sigma_P^2 = \left(X\sigma_1 + \left(1 - X\right)\sigma_2\right)^2$$

Exercice : corrélations parfaites - arbitrage

$$\rho_{12} = +1$$

$$\sigma_P^2 = \left(X\sigma_1 + (1-X)\sigma_2\right)^2$$

- *Écart-type des rentabilités*

$$\sigma_P = \left|X\sigma_1 + (1-X)\sigma_2\right|$$

  - Fait intervenir une valeur absolue
  - Si $\boldsymbol{X_1 = X \geq 0}$ et $\boldsymbol{X_2 = 1 - X \geq 0}$,
  - alors $\boldsymbol{X\sigma_1 + (1-X)\sigma_2 \geq 0}$
  - Puisque $\boldsymbol{\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0}$
  - Dans ce cas, $\boldsymbol{\sigma_P = |X\sigma_1 + (1-X)\sigma_2| = X\sigma_1 + (1-X)\sigma_2}$
  - Prenons $\boldsymbol{\sigma_2 = 20\%}$, $\boldsymbol{\sigma_1 = 10\%}$, $\boldsymbol{X = 3}$, $\boldsymbol{1 - X = -2}$
  - $\boldsymbol{X\sigma_1 + (1-X)\sigma_2 = 3 \times 10\% + (1-3) \times 20\% = -10\%}$
  - $\boldsymbol{\sigma_P = |-10\%| = 10\%}$

Exercice : corrélations parfaites - arbitrage $\rho_{12} = +1$

- Écart-type des rentabilités

$$\sigma_P = \left| X\sigma_1 + (1 - X)\sigma_2 \right|$$

  - *Si* $X < 0$ *ou* $1 - X < 0$,
  - $X\sigma_1 + (1 - X)\sigma_2$ *peut devenir négatif*
- $\sigma_P = |X\sigma_1 + (1 - X)\sigma_2| = -(X\sigma_1 + (1 - X)\sigma_2)$
  - *Si* $X\sigma_1 + (1 - X)\sigma_2 \leq 0$
- $\sigma_P = |X\sigma_1 + (1 - X)\sigma_2| = X\sigma_1 + (1 - X)\sigma_2$
  - *Si* $X\sigma_1 + (1 - X)\sigma_2 \geq 0$
  - *On peut transformer la condition de signe sur* $X\sigma_1 + (1 - X)\sigma_2$ *en une condition sur* X

Exercice : corrélations parfaites - arbitrage

$\rho_{12} = +1$

- On peut transformer la condition de signe sur $X\sigma_1 + (1-X)\sigma_2$ en une condition sur X
- $X\sigma_1 + (1-X)\sigma_2 = \sigma_2 + X(\sigma_1 - \sigma_2)$
- On va supposer que $\sigma_2 > \sigma_1$
  - $\sigma_1 - \sigma_2 < 0$
  - $X\sigma_1 + (1-X)\sigma_2 > 0 \Leftrightarrow X(\sigma_1 - \sigma_2) > -\sigma_2$
  - $X\sigma_1 + (1-X)\sigma_2 > 0 \Leftrightarrow X < -\sigma_2/(\sigma_1 - \sigma_2)$
- Si $X = -\sigma_2/(\sigma_1 - \sigma_2)$,
- $\sigma_P = |X\sigma_1 + (1-X)\sigma_2| = 0$
- On a alors un portefeuille non risqué construit à partir de deux titres risqués

Exercice : corrélations parfaites - arbitrage

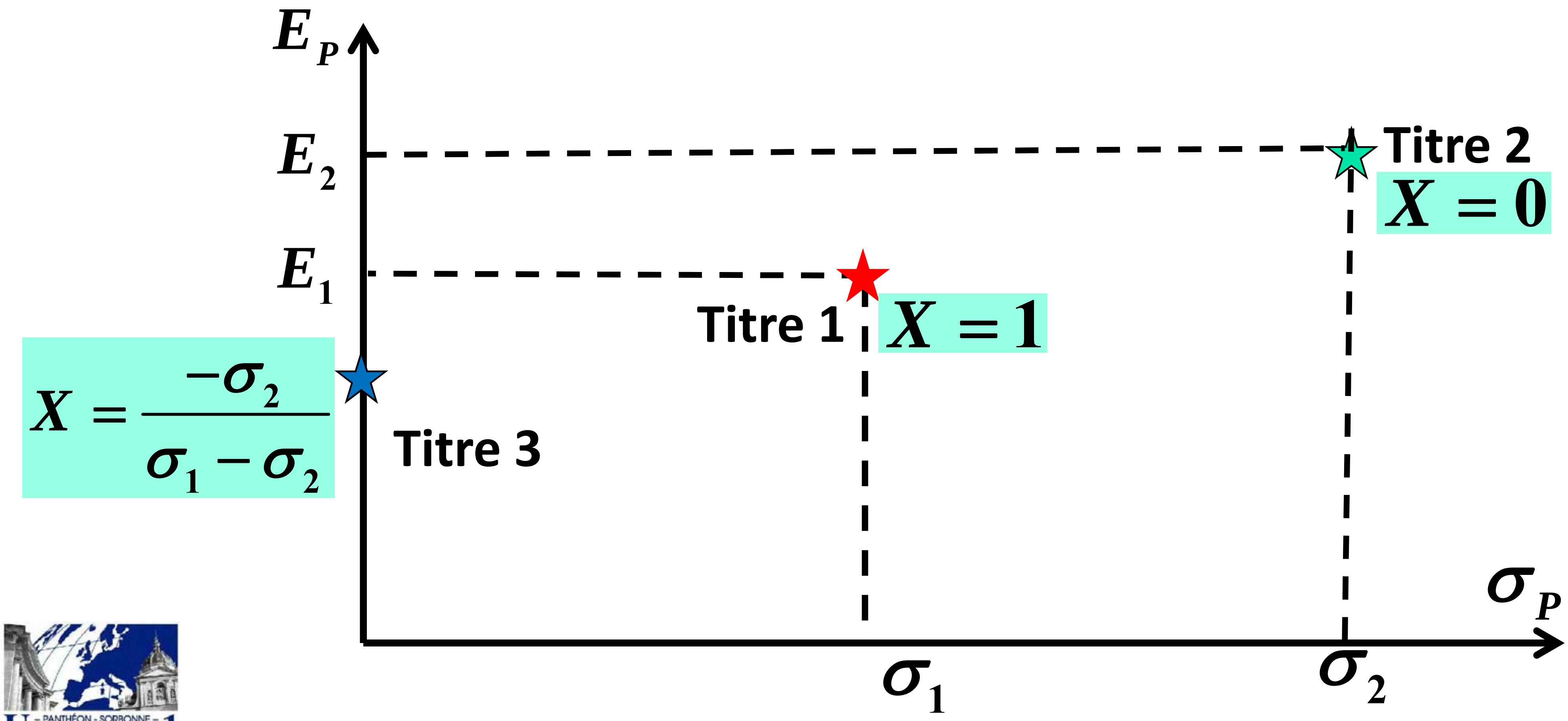
$\rho_{12} = +1$

- Espérance de rentabilité de ce portefeuille non risqué
- $\boldsymbol{X = -\sigma_2/(\sigma_1 - \sigma_2)}$
- $\boldsymbol{E_P = E_2 + X(E_1 - E_2)}$
  - $\boldsymbol{E_P}$ *espérance de rentabilité du portefeuille non risqué*
  - $\boldsymbol{E_1}$ *espérance de rentabilité du titre* **1**
  - $\boldsymbol{E_1}$ *espérance de rentabilité du titre* **2**
- $\boldsymbol{E_P = E_2 - \sigma_2(E_1 - E_2)/(\sigma_1 - \sigma_2)}$
- Considérerons le portefeuille non risqué comme un titre
  - *Noté 3*
  - $\boldsymbol{E_3 = E_P, \sigma_3 = \sigma_P = 0}$

Exercice : corrélations parfaites - arbitrage

$\rho_{12} = +1$

- Représentation des titres 1 et 2 et du portefeuille sans risque (3)
  - *Plan écart-type des rentabilités - espérance des rentabilités*
  - *Cas où* $E_2 > E_1, \sigma_2 > \sigma_1$



Exercice : corrélations parfaites - arbitrage $\rho_{12} = +1$

- Le portefeuille 3 non risqué est constitué de titres 1 et 2
- Tout portefeuille constitué de titres 3 et de titres 1 est donc composé de titres 1 et de titres 2
- En étudiant la CML, on a vu l'ensemble des portefeuilles constitué d'un placement sans risque et d'un titre risqué
  - *Ici le placement sans risque est le titre 3*
- Il s'agit de la réunion de deux demi-droites
  - *La demi-droite inférieure correspond à des espérances de rentabilité inférieures au taux sans risque.*
  - *Et à des ventes à découvert du titre risqué :*
  - *En effet,* $\boldsymbol{E_P = (1 - X_2)R_F + X_2E_2 = R_F + X_2(E_2 - X_2)}$
  - $\boldsymbol{E_P = R_F + X_2(E_2 - X_2) < R_F \Leftrightarrow X_2 < 0}$

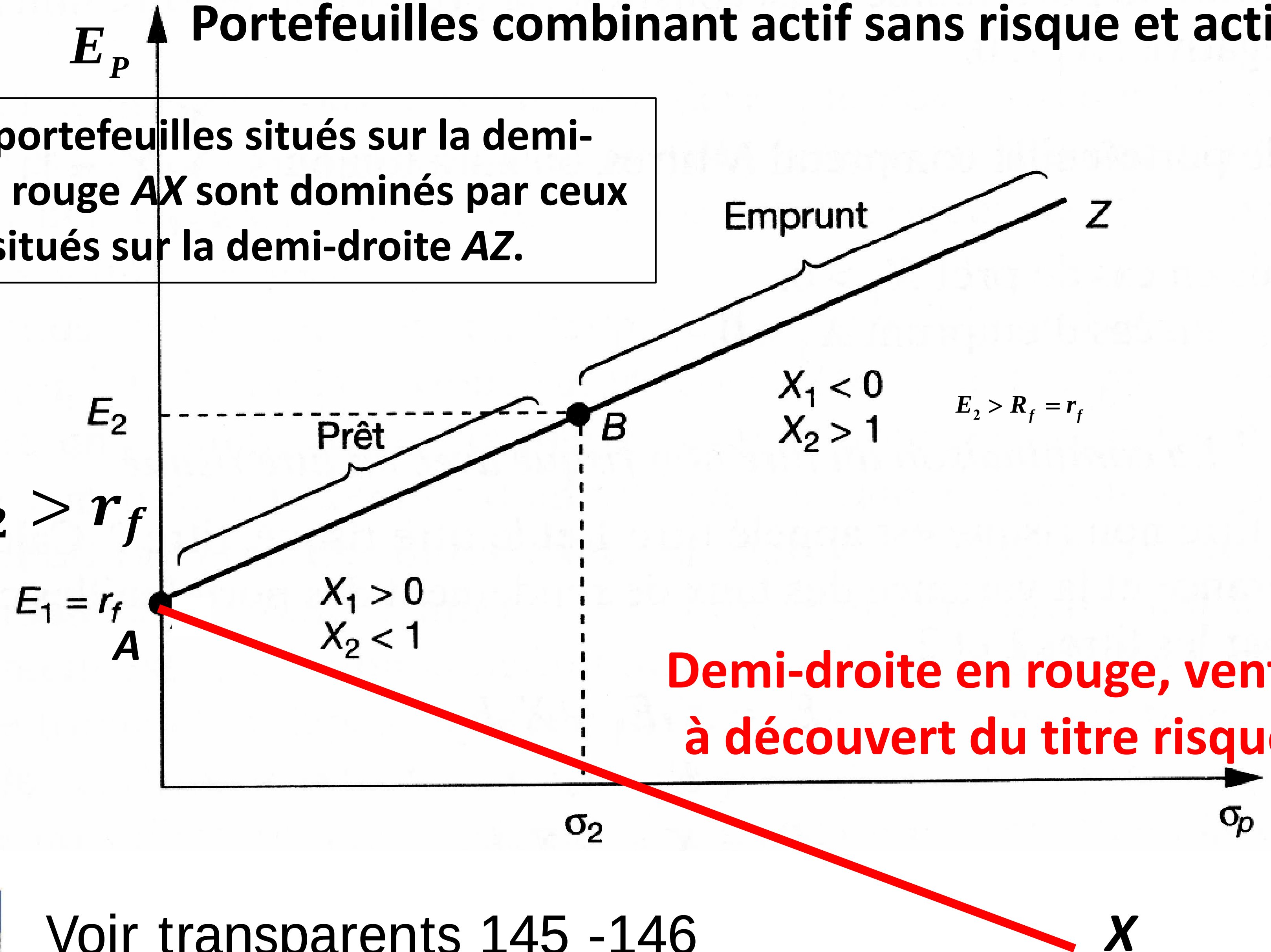
Exercice : corrélations parfaites - arbitrage

$$\rho_{12} = +1$$

Portefeuilles combinant actif sans risque et actif risqué

Les portefeuilles situés sur la demi-droite rouge *AX* sont dominés par ceux situés sur la demi-droite *AZ*.

$$E_2 > r_f$$



Demi-droite en rouge, vente à découvert du titre risqué

Voir transparents 145 -146

Exercice : corrélations parfaites - arbitrage

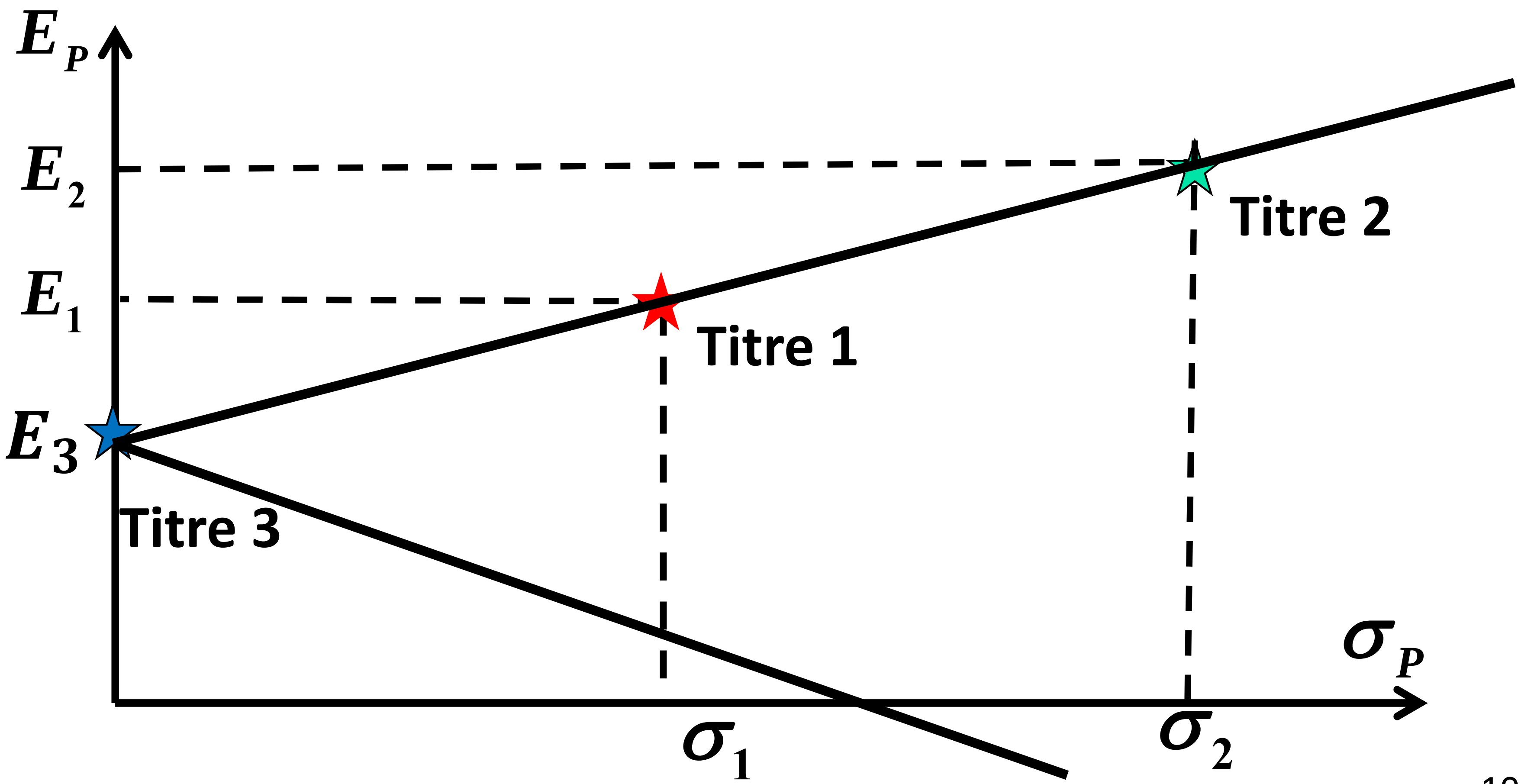
$\rho_{12} = +1$

- Le portefeuille 3 non risqué est constitué de titres 1 et 2
- Tout portefeuille constitué de titres 3 et de titres 1 est donc composé de titres 1 et de titres 2
- En étudiant la CML, on a vu l'ensemble des portefeuilles constitué d'un placement sans risque et d'un titre risqué
  - *Ici le placement sans risque est le titre 3*
- Il s'agit de la réunion de deux demi-droites
  - *La demi-droite inférieure correspond à des espérances de rentabilité inférieures au taux sans risque.*
  - *Et à des ventes à découvert du titre risqué :*
  - *En effet,* $\boldsymbol{E_P = (1 - X_2)R_F + X_2 E_2 = R_F + X_2(E_2 - X_2)}$
  - $\boldsymbol{E_P = R_F + X_2(E_2 - X_2) < R_F \Leftrightarrow X_2 < 0}$

Exercice : corrélations parfaites - arbitrage

$\rho_{12} = +1$

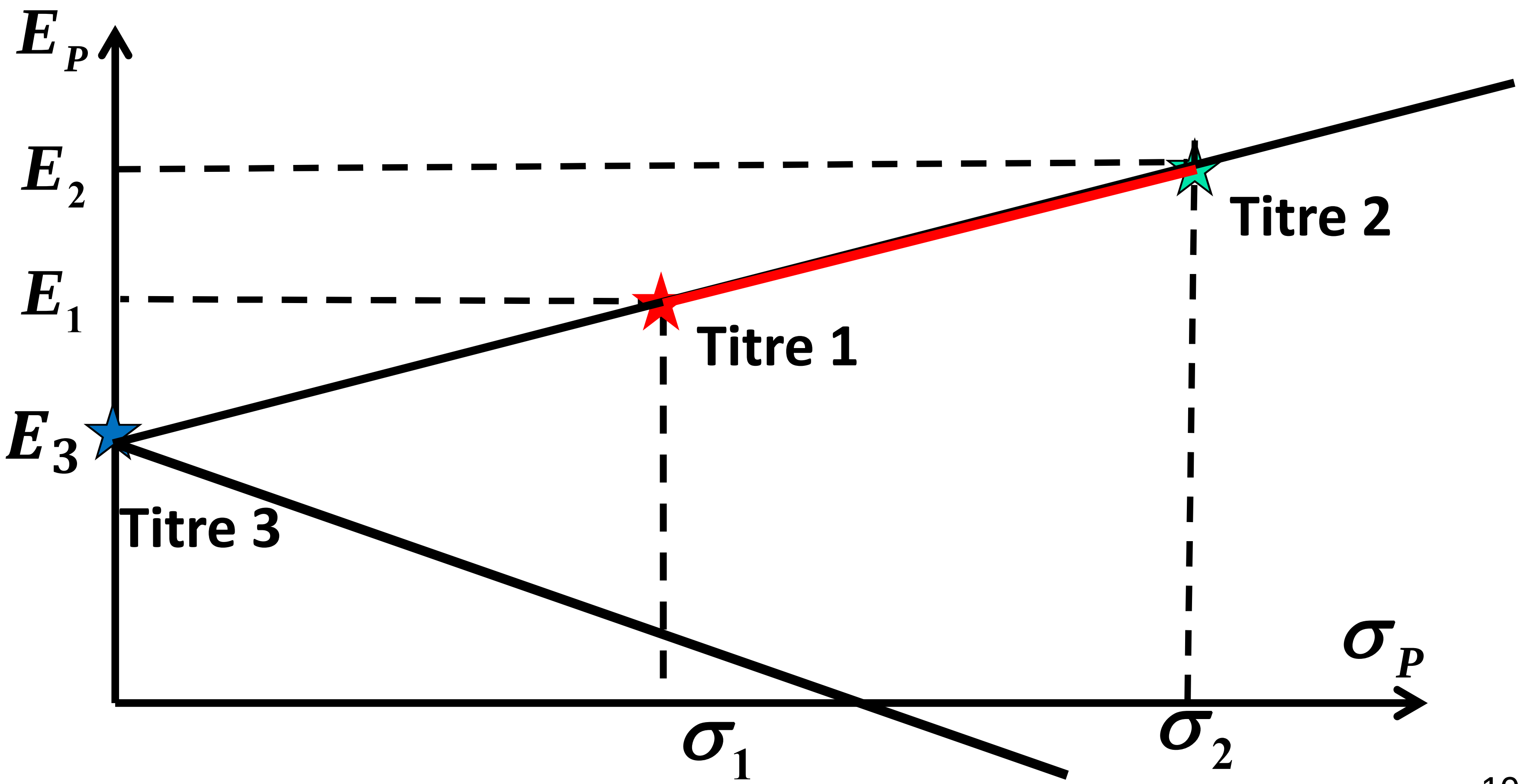
- Représentation des titres 1 et 2 et du portefeuille sans risque (3)
  - *Plan écart-type des rentabilités - espérance des rentabilités*
  - *Cas où* $\boldsymbol{E_2 > E_1, \sigma_2 > \sigma_1}$



Exercice : corrélations parfaites - arbitrage

$\rho_{12} = +1$

- Ensemble des portefeuilles formés de 1 et de 2
  - *Pour toutes les valeurs de* $\boldsymbol{X}$
  - *En rouge, portefeuilles sans vente à découvert,* $\mathbf{0 \leq X \leq 1}$



Exercice : corrélations parfaites - arbitrage $\rho_{12} = +1$

- On rappelle que si $X = -\sigma_2/(\sigma_1 - \sigma_2)$,
- $\sigma_P = |X\sigma_1 + (1 - X)\sigma_2| = 0$
- $E_P = E_3 = E_2 - \sigma_2(E_1 - E_2)/(\sigma_1 - \sigma_2)$
- S'il existe un placement sans risque au taux R_f, alors $E_3 = R_f$
  - *En l'absence d'opportunités d'arbitrage*
  - *Si $E_3 > R_f$, on peut emprunter $k > 0$ euros au taux R_f et investir cette somme dans le titre 3*
  - *La mise de fonds à la date courante est nulle*
  - *À la date suivant la date courante, on doit rembourser l'emprunt soit $k \times (1 + R_f)$*

- PANTHÉON - SORBONNE -
UNIVERSITÉ PARIS 1

Exercice : corrélations parfaites - arbitrage

$\rho_{12} = +1$

- *À la date suivant la date courante, on doit rembourser l'emprunt soit* $\boldsymbol{k} \times \left(\mathbf{1} + \boldsymbol{R_f}\right)$
- *On récupère* $\boldsymbol{k} \times (\mathbf{1} + \boldsymbol{E_3})$*du placement en titre* $\mathbf{3}$
- *Soit* $\boldsymbol{k} \times \left(\boldsymbol{E_3} - \boldsymbol{R_f}\right) > \mathbf{0}$
- *Comme* $\boldsymbol{k}$ *est arbitrairement grand, le profit à la date future est arbitrairement grand*
- *Le risque est nul : les rentabilités sont non aléatoires*
- *La mise de fonds initiale est nulle*
- *La situation précédente est une opportunité d'arbitrage*
- *On admet couramment qu'il n'existe pas d'opportunité d'arbitrage sur les marchés « sans frictions »*
- *Donc, on ne peut avoir* $\boldsymbol{E_3} > \boldsymbol{R_f}$

Exercice : corrélations parfaites - arbitrage

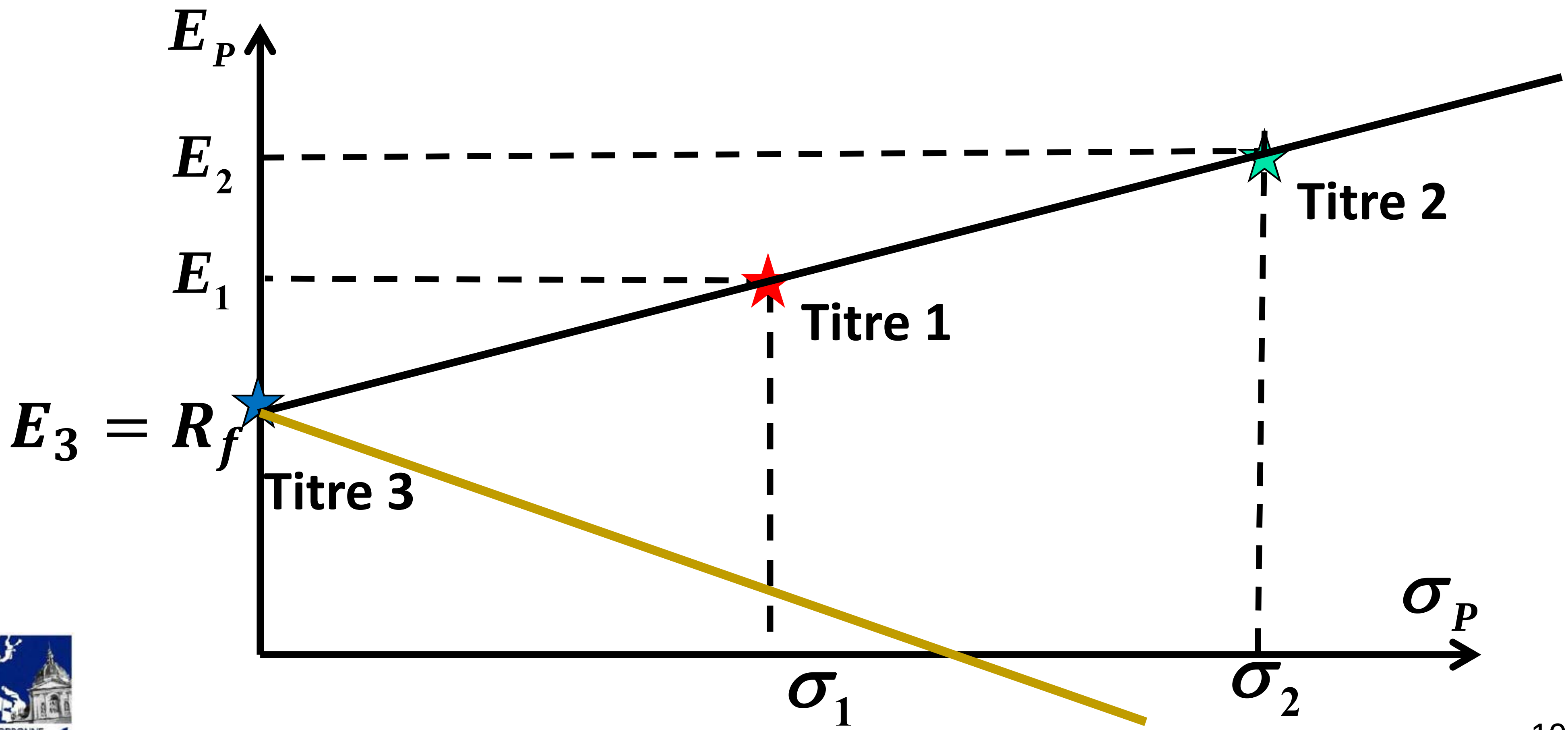
$\rho_{12} = +1$

- Si l'on suppose maintenant que $\boldsymbol{E_3 < R_f}$
  - *On prête une somme* $\boldsymbol{k}$ *au taux* $\boldsymbol{R_f}$
  - *On vend à découvert des titres* $\mathbf{3}$ *pour un montant* $\boldsymbol{k}$
  - *L'investissement net à la date courante est nul*
  - *On récupère à la date suivant la date courante le montant*
  - $\boldsymbol{k \times \left(R_f - E_3\right) > 0}$
  - *On a à nouveau construit une opportunité d'arbitrage*
  - *S'il n'existe pas d'opportunité d'arbitrage, on ne peut pas avoir* $\boldsymbol{E_3 < R_f}$
- La seule valeur de $\boldsymbol{E_3}$ compatible avec l'absence d'opportunité d'arbitrage est $\boldsymbol{E_3 = R_f}$

Exercice : corrélations parfaites - arbitrage

$$\rho_{12} = +1$$

- *La demi-droite noire représente les portefeuilles constitués de placement sans risque et de titre* **2**
- *Le titre* **1** *était en fait un portefeuille constitué de placement sans risque et de titre* **2**



Exercice $\boldsymbol{\rho_{12} = -1}$

- Exercice : étude du cas extrême $\boldsymbol{\rho_{12} = -1}$
  - *Ensemble des portefeuilles constitués de deux actifs quand le coefficient de corrélation est égal à* $\mathbf{-1}$ *?*
    - Fraction de la richesse investie dans le titre $\mathbf{1}$: $\boldsymbol{X_1 = X}$
    - Rentabilité du portefeuille $\boldsymbol{R_P = XR_1 + (1-X)R_2}$
    - Espérances des rentabilités : $\boldsymbol{E_1 = E[R_1], E_2 = E[R_2]}$

$$\boldsymbol{E\left[R_P\right] = E_P = XE\left[R_1\right] + \left(1-X\right)E\left[R_2\right] = E_2 + X\left(E_1 - E_2\right)}$$

- Variance des rentabilités :

$$\boldsymbol{\mathrm{Var}\left[R_P\right] = \sigma_P^2 = X^2\sigma_1^2 + 2\rho_{12}X\left(1-X\right)\sigma_1\sigma_2 + \left(1-X\right)^2\sigma_2^2}$$

$$\boldsymbol{\sigma_P^2 = X^2\sigma_1^2 - 2X\left(1-X\right)\sigma_1\sigma_2 + \left(1-X\right)^2\sigma_2^2}$$

$$\boldsymbol{\sigma_P^2 = \left(X\sigma_1 - \left(1-X\right)\sigma_2\right)^2}$$

Exercice $\rho_{12} = -1$

- Écart-type des rentabilités

$$\sigma_P = \left| X\sigma_1 - (1-X)\sigma_2 \right|$$

- Fait intervenir une valeur absolue

$$\begin{cases} \sigma_P = X\sigma_1 - (1-X)\sigma_2, \text{ si } X\sigma_1 - (1-X)\sigma_2 \geq 0 \\ \sigma_P = -X\sigma_1 + (1-X)\sigma_2, \text{ si } X\sigma_1 - (1-X)\sigma_2 \leq 0 \end{cases}$$

- $\sigma_P = 0$ si $X = \sigma_2/(\sigma_1 + \sigma_2)$. Alors,

$$X \geq 0, 1 - X = \sigma_1 / (\sigma_1 + \sigma_2) \geq 0$$

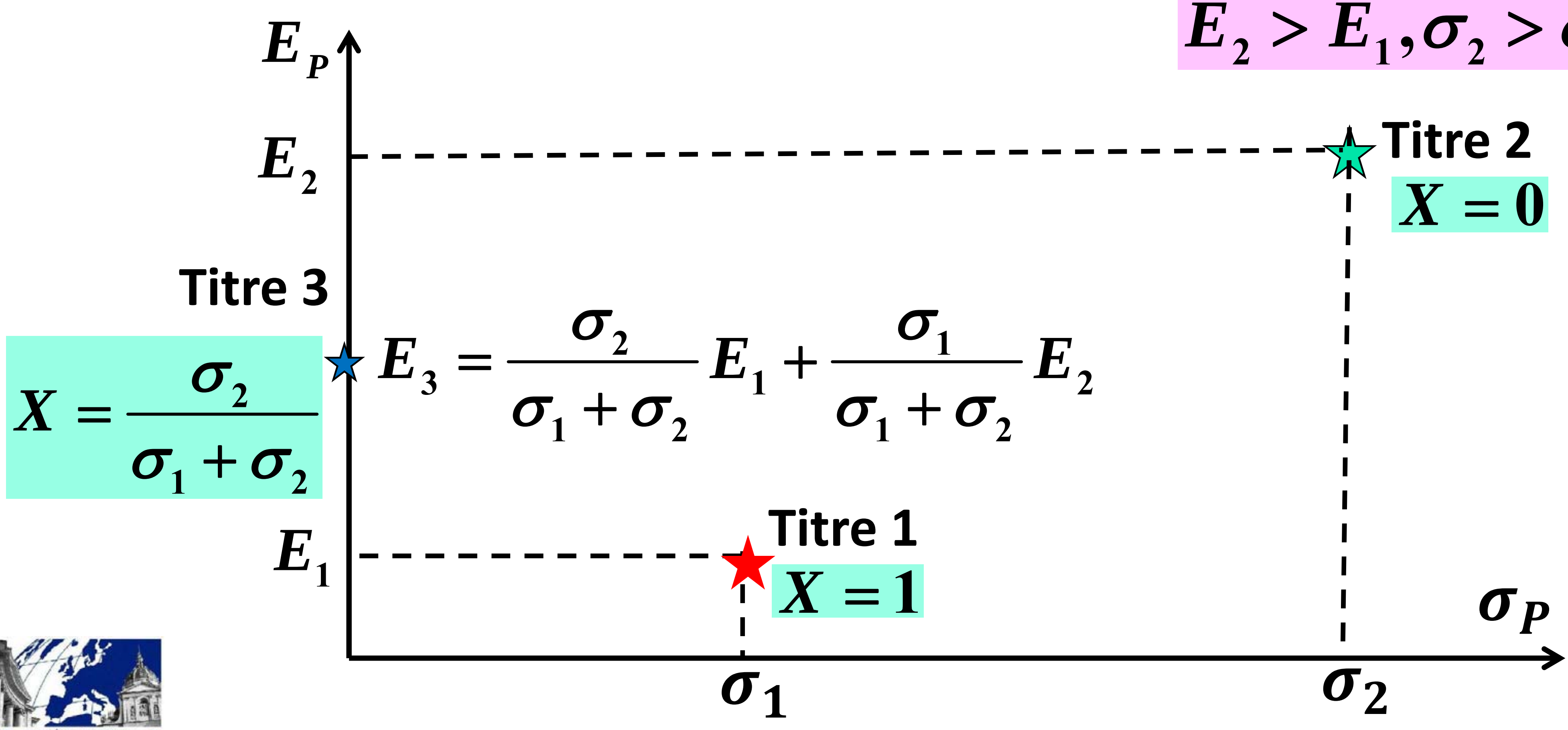
- *Il est possible dans le cas étudié ($\rho_{12} = -1$) de constituer un portefeuille sans risque (titre* 3*) à partir des titres risqués* 1 *et* 2 *!*
  - Taux sans risque associé

$$E_P = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} E_1 + \frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2} E_2$$

Exercice $\boldsymbol{\rho_{12} = -1}$

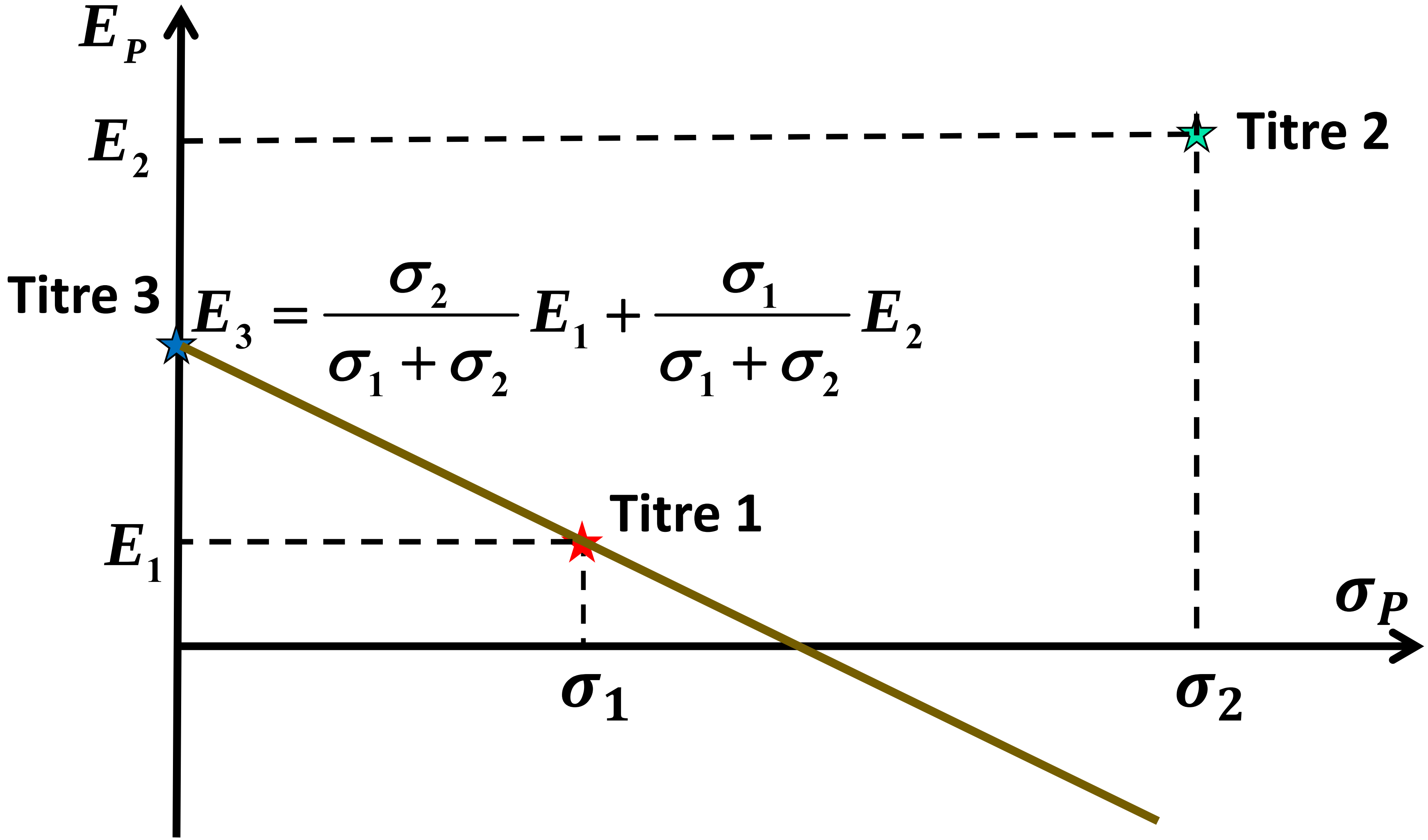
- Représentation des deux titres **1** et **2** et du titre **3** (sans risque)
  - *Plan (écart-type des rentabilités, espérance des rentabilités)*
  - *Pour simplifier l'analyse, on se restreint au cas :*

$$E_2 > E_1, \sigma_2 > \sigma_1$$



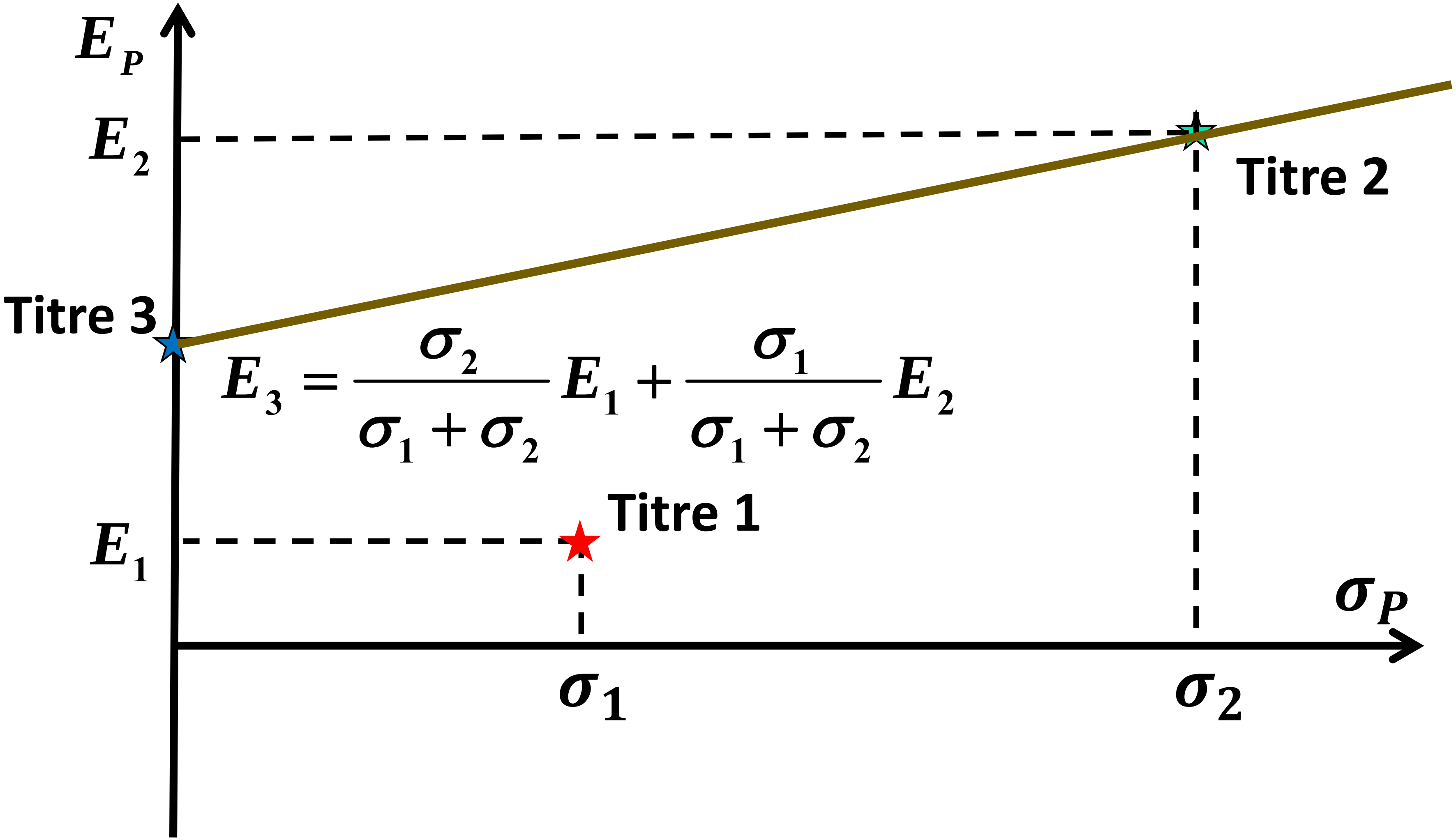
Exercice $\boldsymbol{\rho_{12} = -1}$

- Si on combine les titres 1 et 3, on obtient la demi-droite reliant les points associés aux titres 1 et 3



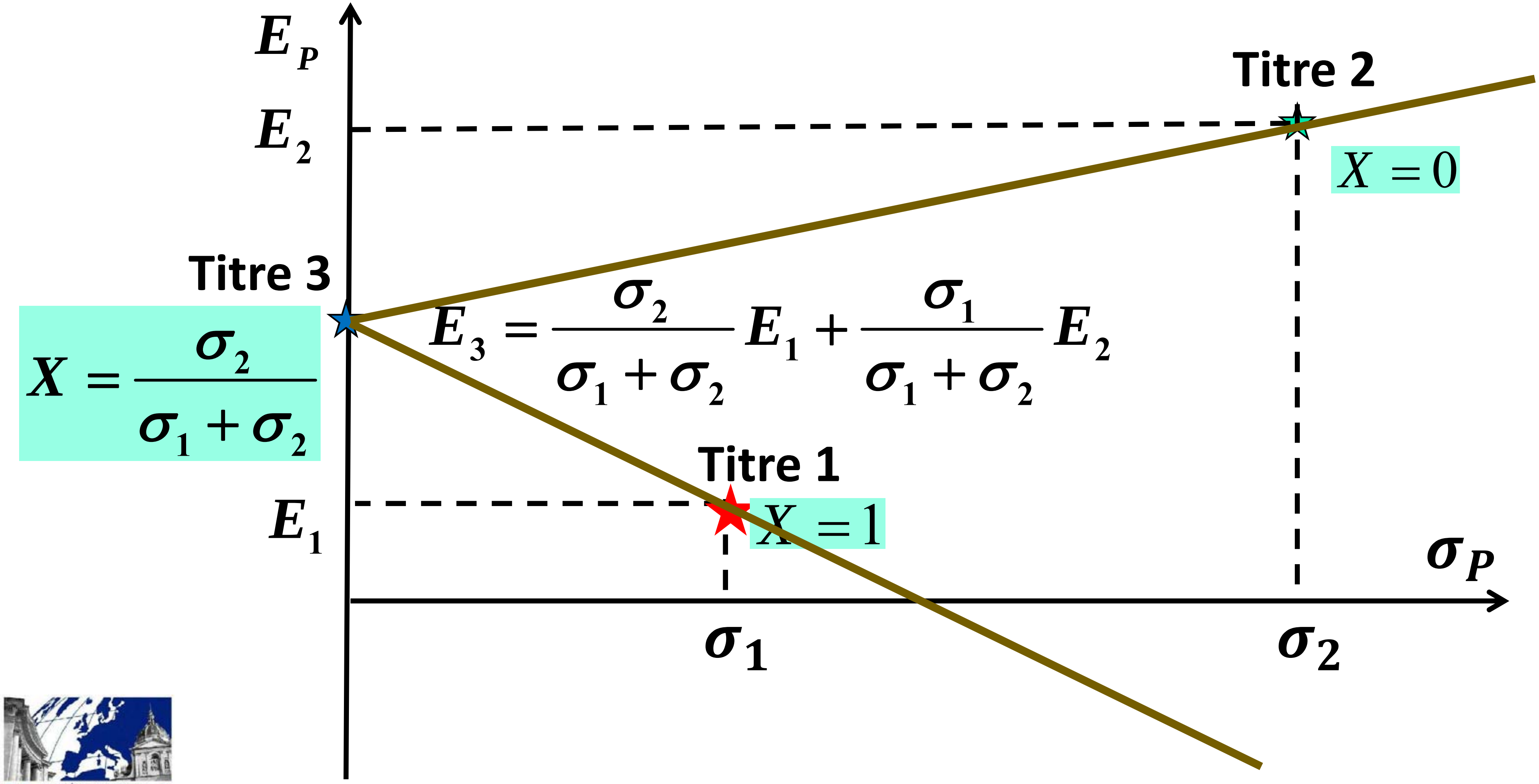
Exercice $\boldsymbol{\rho_{12} = -1}$

- Si on combine les titres 2 et 3, on obtient la demi-droite reliant les points associés aux titres 2 et 3



Exercice $\rho_{12} = -1$

- Au total, l'ensemble des portefeuilles combinant les titres 1 et 2 est représenté par la réunion des deux demi-droites précédentes



Exercice $\boldsymbol{\rho_{12} = -1}$

- On remarque que l'ensemble des portefeuilles constitués des titres risqués 1 et 2, quand $\boldsymbol{\rho_{12} = -1}$
- a exactement la même forme géométrique que l'ensemble des portefeuilles constitués de l'actif sans risque et d'un actif risqué
  - *Réunion de deux demi-droites*
  - *Ce n'est pas une coïncidence car quand* $\boldsymbol{\rho_{12} = -1}$, *on peut reconstituer un actif sans risque* 3, *à partir des titres* 1 *et* 2.
  - *Le portefeuille 3 comporte une quantité non nulle de titre* 1

$$\boldsymbol{X = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} > 0}$$

  - *L'ensemble des portefeuilles combinant les titres* 1 *et* 2 *est identique à l'ensemble des portefeuilles combinant le titre* 1 *et le portefeuille* 3.

Exercice $\rho_{12} = -1$

- Étude du cas où les ventes à découvert sont interdites :

$$0 \leq X \leq 1$$

  - *Le transparent précédent représente l'ensemble des portefeuilles combinant les titres* 1 *et* 2, *de rentabilité*
  - $R_P = X \times R_1 + (1 - X) \times R_2, \quad X \in \mathbb{R}$
  - *Dans le plan (écart-type des rentabilités, espérance des rentabilités)*
  - *L'ensemble des portefeuilles de rentabilité* $R_P = X \times R_1 + (1 - X) \times R_2,\ X \in [0, 1]$
  - *est donc inclus dans la réunion des deux demi-droites présentées dans le transparent précédent.*
  - *Déterminons quelle partie de deux demi-droites retenir*

Exercice $\boldsymbol{\rho_{12} = -1}$

- Examinons comment la rentabilité des portefeuilles constitués de titres **1** et **2** dépend de $\boldsymbol{X}$

$$\boldsymbol{R_P = X \times R_1 + (1 - X) \times R_2, \quad X \in \mathbb{R}}$$

  - *On rappelle que :*

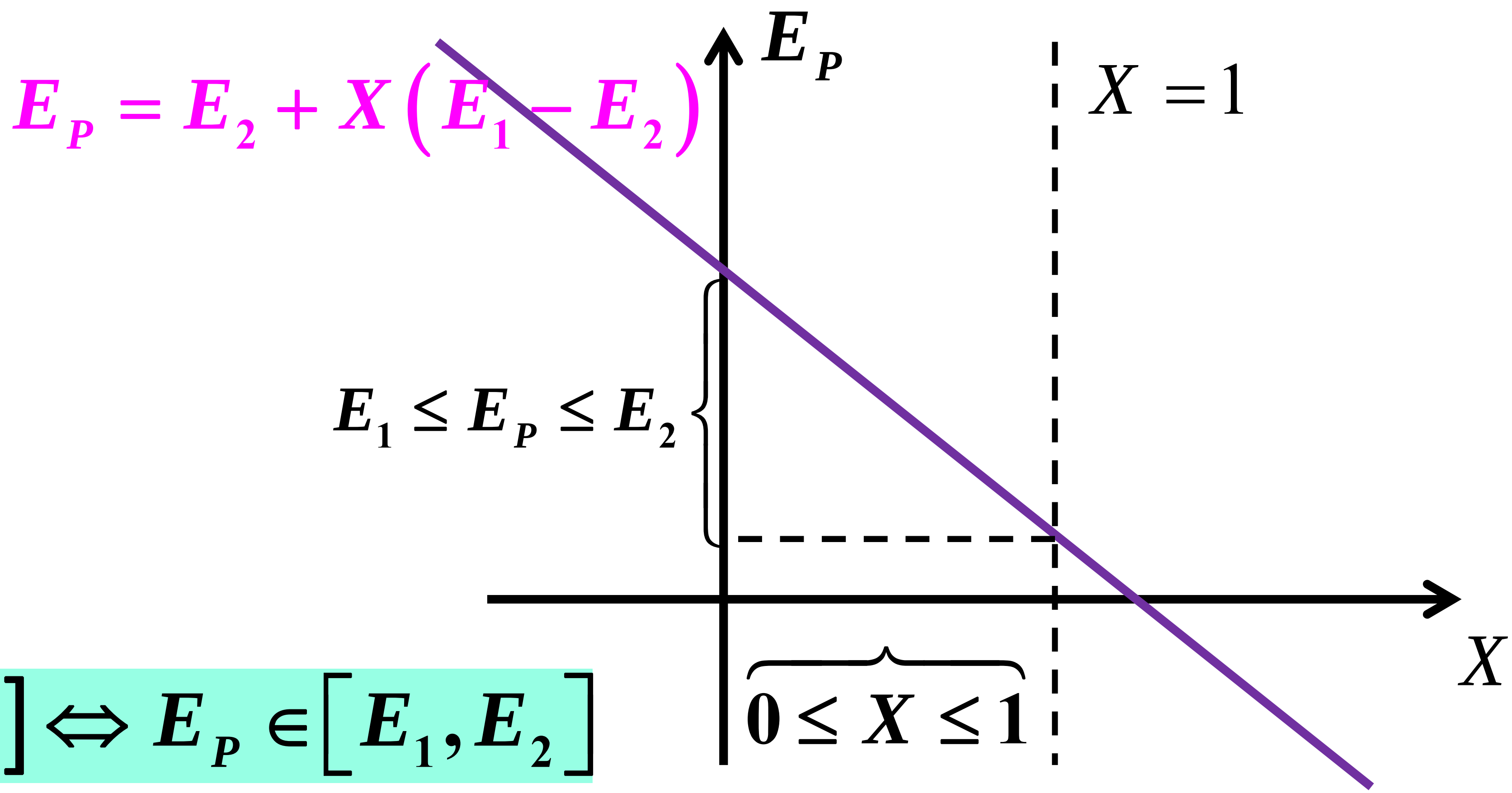
$$\boldsymbol{E[R_P] = E_P = XE[R_1] + (1 - X)E[R_2] = E_2 + X(E_1 - E_2)}$$

  - *Avec* $\boldsymbol{E_1 < E_2}$ *.* $\boldsymbol{E_P}$ *est une fonction affine décroissante de* $\boldsymbol{X}$
    - Quand $\boldsymbol{X < 0,\ E_P > E_2}$
    - Quand $\boldsymbol{X > 1,\ E_P < E_1}$
    - Quand $\boldsymbol{X}$croit de $\boldsymbol{0}$ à $\boldsymbol{1}$, $\boldsymbol{E_P}$ décroit de $\boldsymbol{E_2}$à $\boldsymbol{E_1}$
  - *Au total* $\boldsymbol{X \in [0,1] \Leftrightarrow E_P \in [E_1, E_2]}$

UNIVERSITÉ PARIS 1 – PANTHÉON - SORBONNE –

Exercice $\boldsymbol{\rho_{12} = -1}$

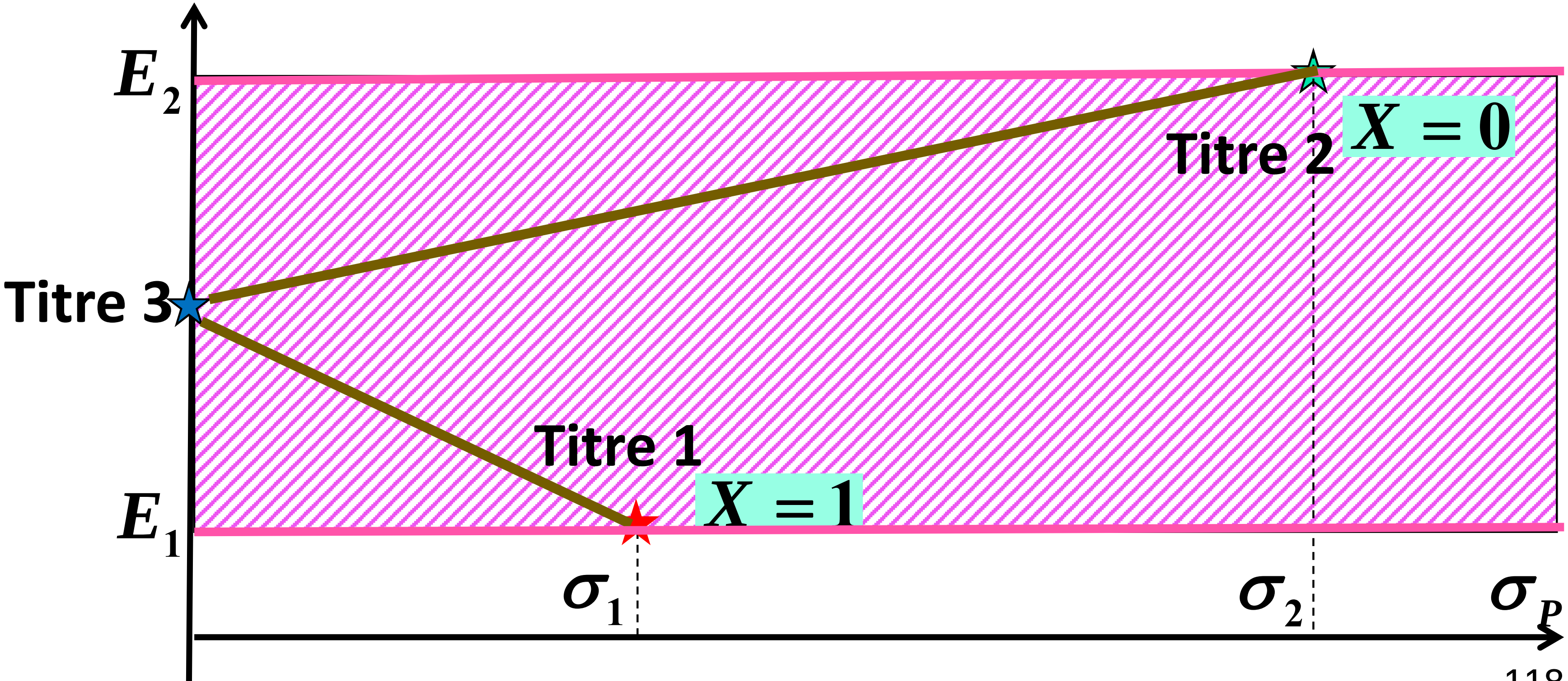
- Espérance de rentabilité des portefeuilles constitués de titres 1 et 2 en fonction de $\boldsymbol{X}$



$$X \in [0,1] \Leftrightarrow E_P \in [E_1, E_2]$$

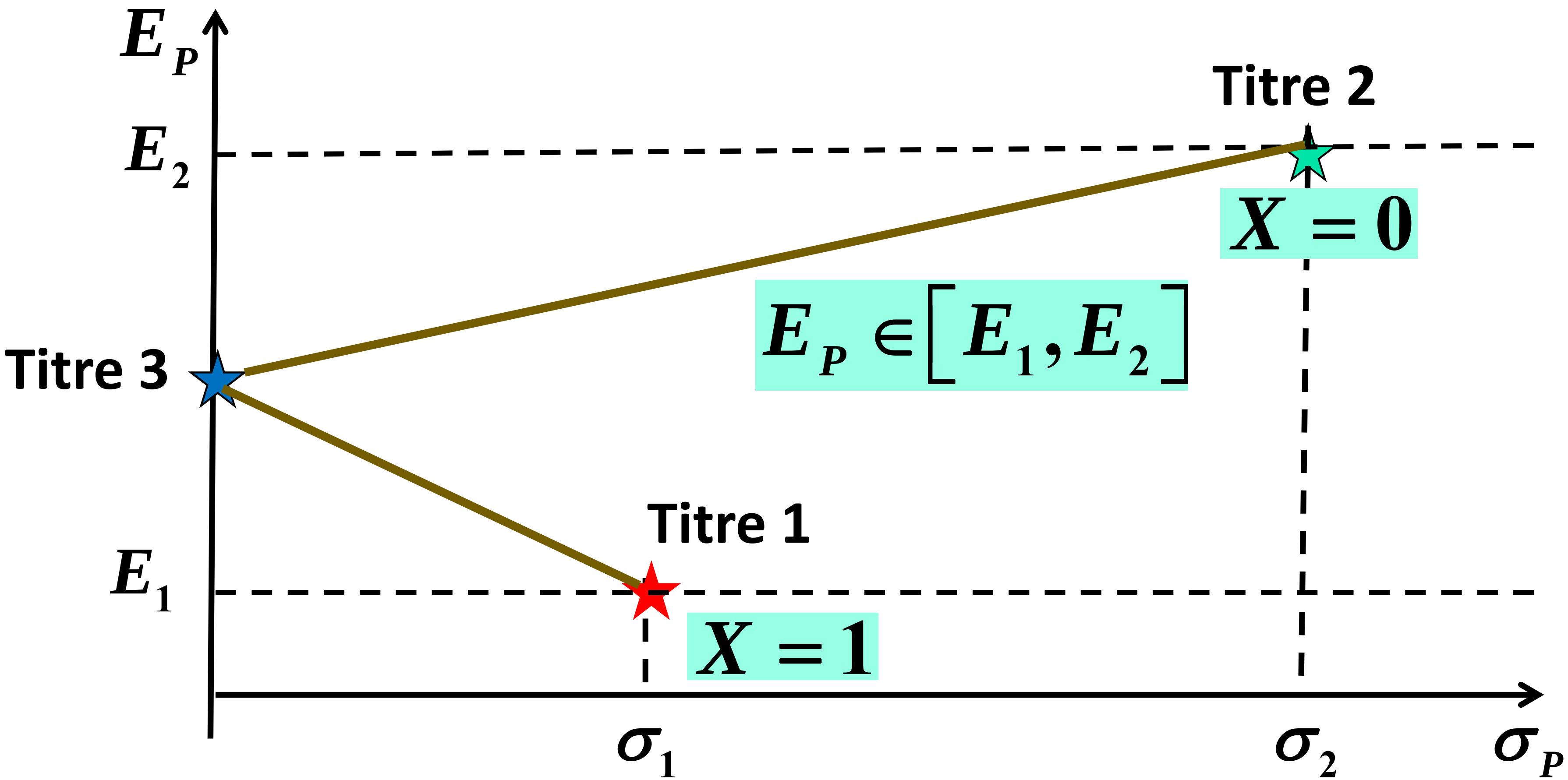
Exercice $\boldsymbol{\rho_{12} = -1}$

- *Ventes à découvert interdites :* $\boldsymbol{E_P \in [E_1, E_2] \Leftrightarrow X \in [0, 1]}$
- *La zone hachurée en rose correspond à l'ensemble des portefeuilles tels que :* $\boldsymbol{E_P \in [E_1, E_2]}$
- *Les portefeuilles formés des titres* 1 *et* 2 *en quantités positives correspondent à l'intersection des deux demi-droites précédentes et de la zone hachurée*



Exercice $\boldsymbol{\rho_{12} = -1}$

- Ventes à découvert interdites : $\mathbf{0 \leq X \leq 1}$
  - *L'ensemble des portefeuilles formés des titres 1 et 2 en quantités positives est la réunion des deux segments de droite*

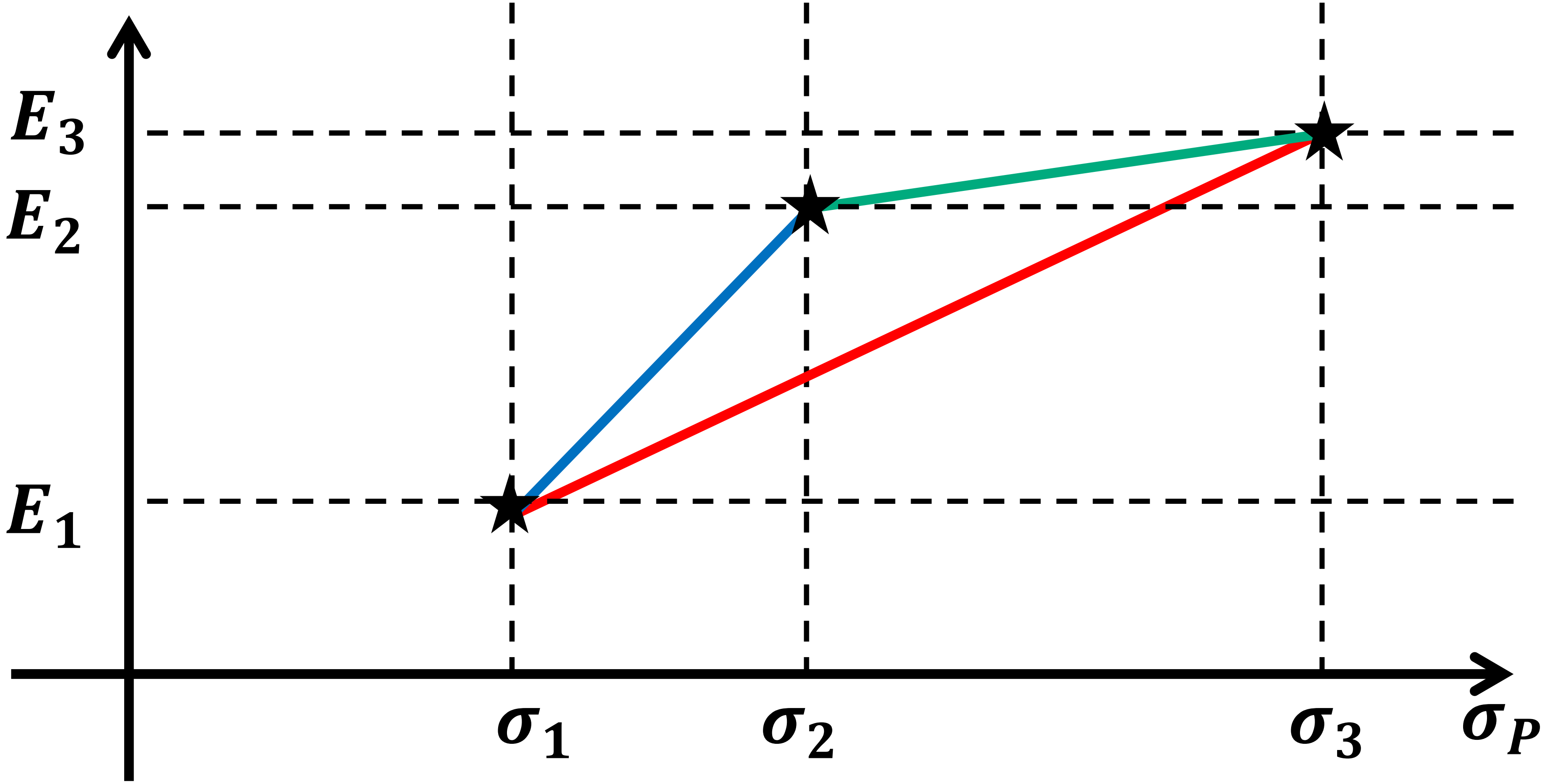


Exercices finance de marché : Trois actifs, corrélations parfaites, pas de vente à découvert

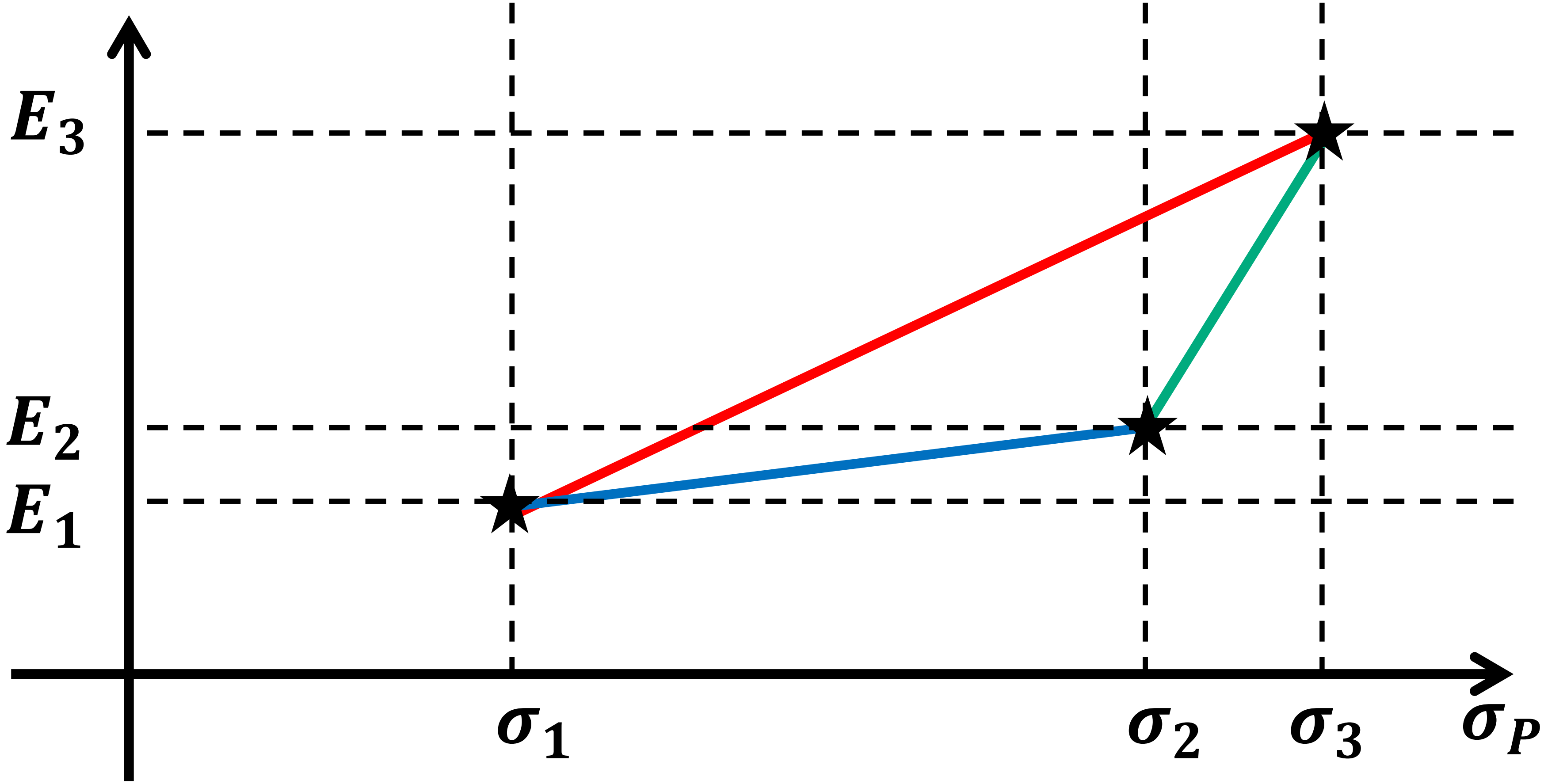
- Problème : trois actifs, corrélations parfaites, pas de vente à découvert
  - $\boldsymbol{E_1 < E_2 < E_3, \sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3}$
  - $\boldsymbol{X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, X_3 \geq 0}$
  - $\boldsymbol{\rho_{12} = \rho_{13} = \rho_{23} = 1}$
- Quelle forme prend la frontière efficiente ?
  - *On distinguera deux cas de figure*
  - *Remarque : on sait comment combiner les titres deux à deux séparément*
  - *Il s'agit des segments de droite qui relient les points associés aux titres dans le plan* $(\boldsymbol{E_P, \sigma_P})$
  - *Un dessin met en évidence deux cas de figure*

Exercices finance de marché : Trois actifs, corrélations parfaites, pas de vente à découvert

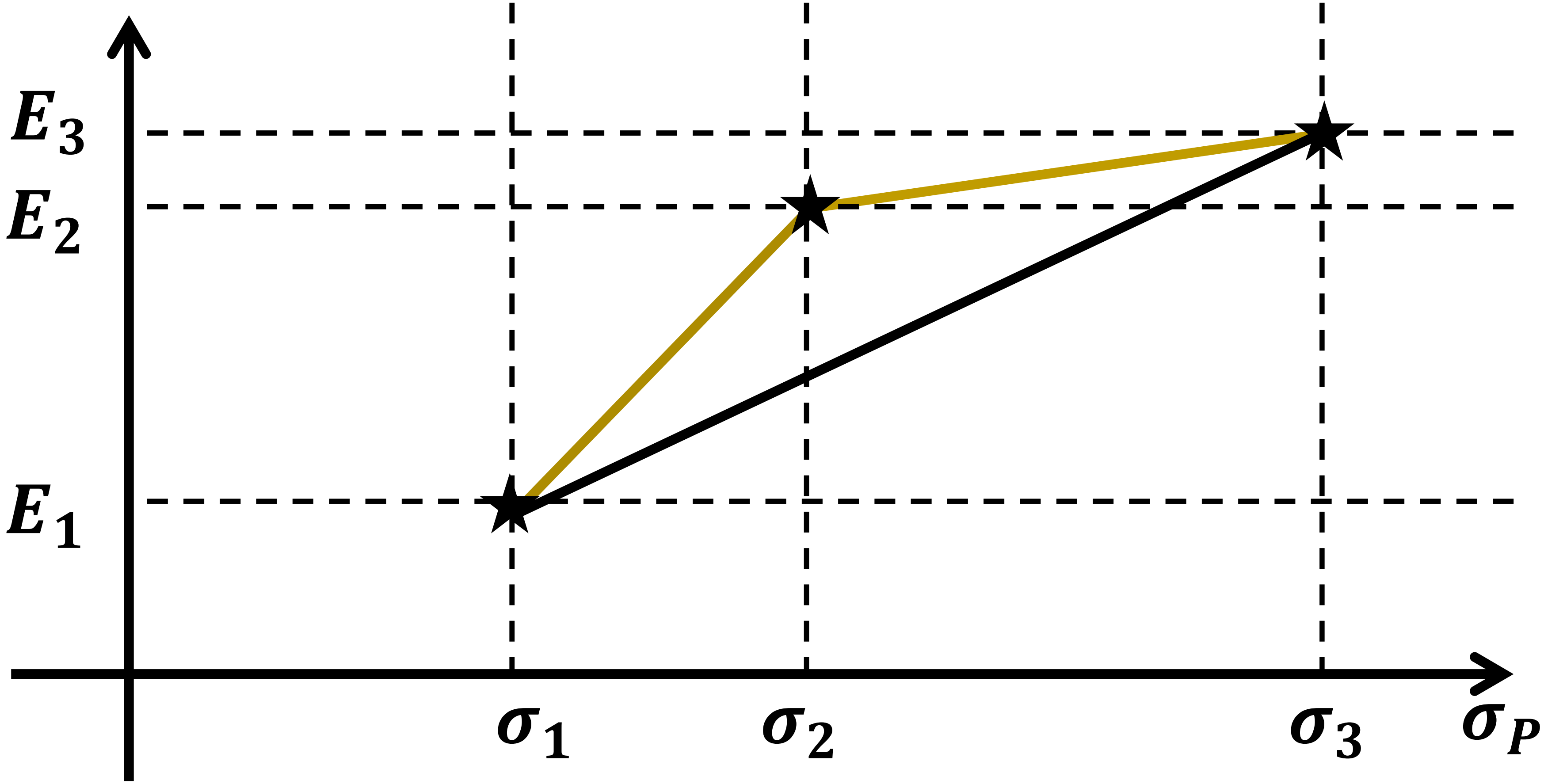
- Problème : trois actifs, corrélations parfaites, pas de vente à découvert
  - *Premier cas de figure*



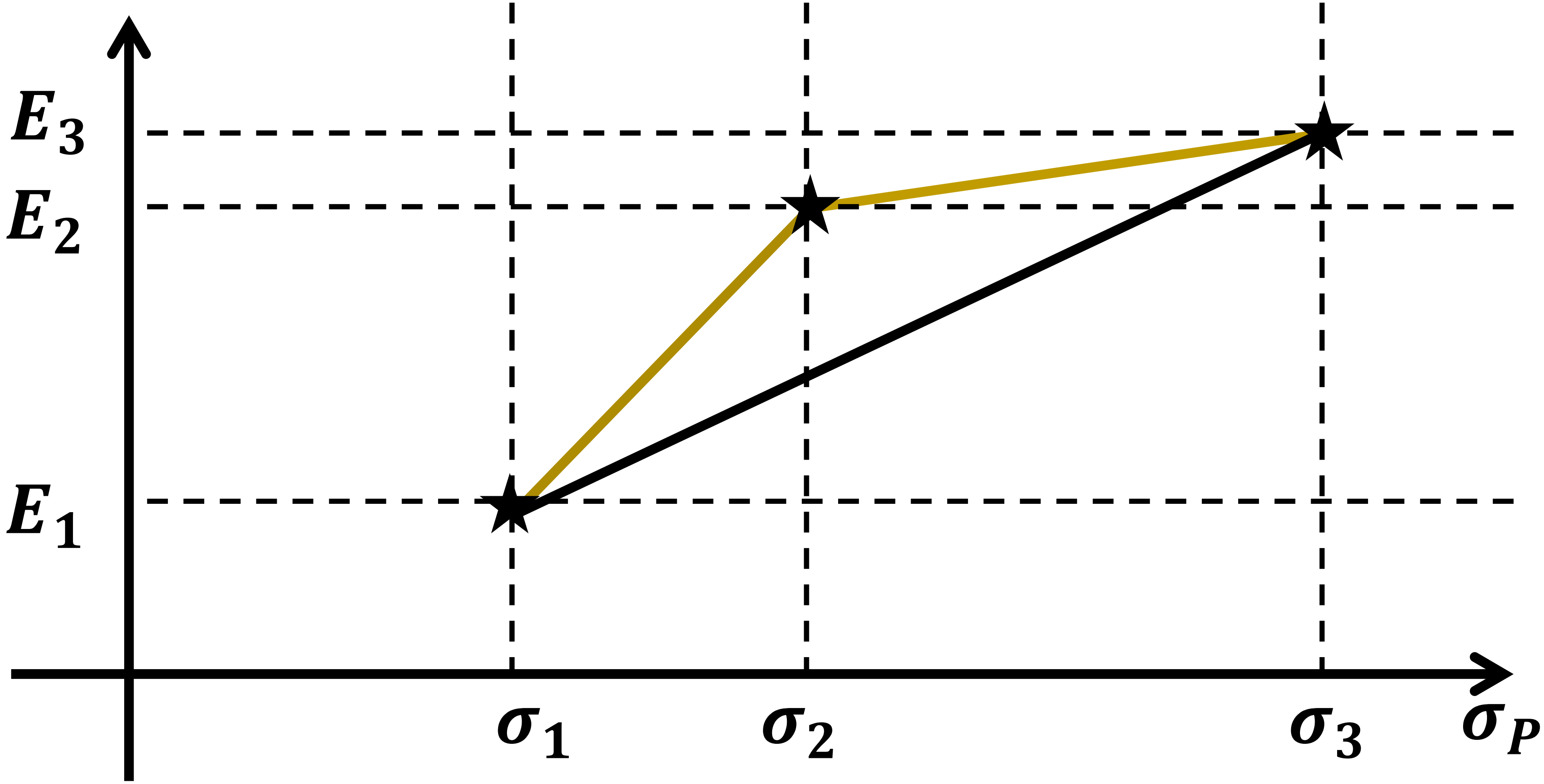
- Problème : trois actifs, corrélations parfaites, pas de vente à découvert
  - *Second cas de figure*



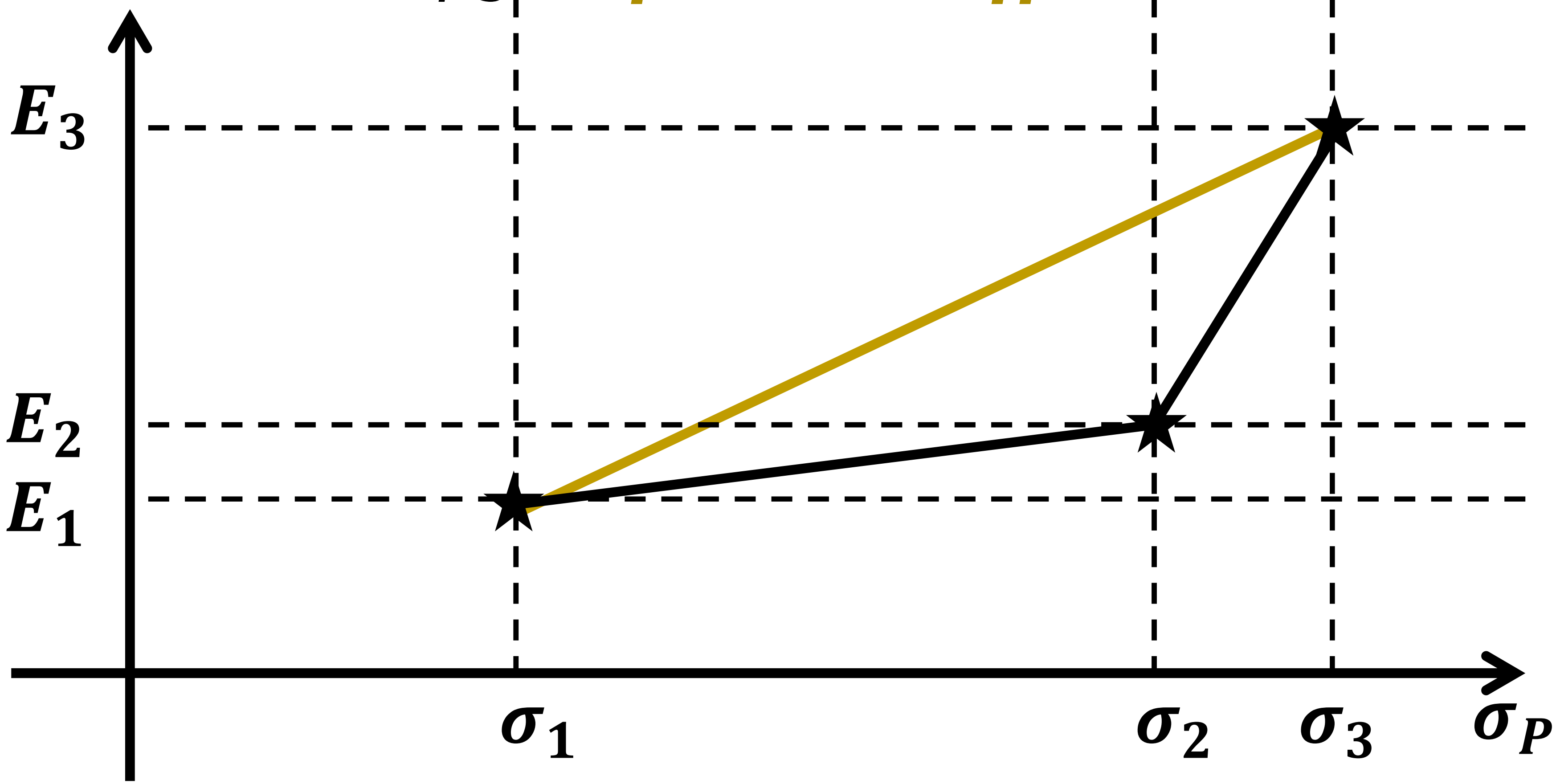
- Trois actifs, corrélations parfaites, pas de vente à découvert
  - *Ensemble des portefeuilles atteignables : intérieur du triangle*
  - $E_P = X_1 E_1 + X_2 E_2 + X_3 E_3, \sigma_P = X_1 \sigma_1 + X_2 \sigma_2 + X_3 \sigma_3$



- Trois actifs, corrélations parfaites, pas de vente à découvert
  - *Ensemble des portefeuilles atteignables : intérieur du triangle*
  - *premier cas de figure* ***frontière efficiente***



- Trois actifs, corrélations parfaites, pas de vente à découvert
  - *Ensemble des portefeuilles atteignables : intérieur du triangle*
  - *Second cas de figure* ***frontière efficiente***

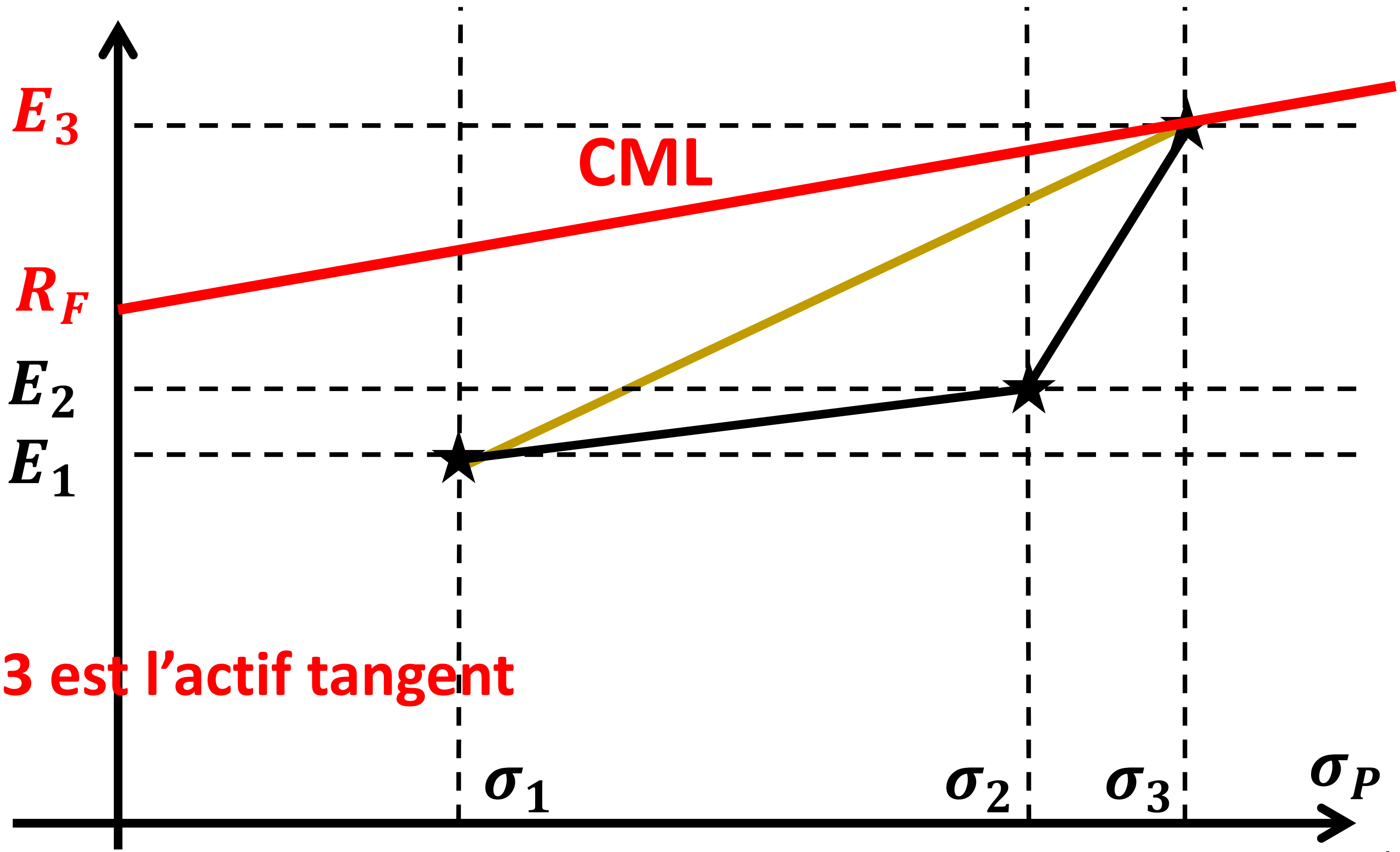


Exercices finance de marché : Trois actifs, corrélations parfaites, pas de vente à découvert

- Trois actifs, corrélations parfaites, pas de vente à découvert
- Introduction d'un placement sans risque, taux $\boldsymbol{R_F}$
  - *Quelle est la forme du portefeuille « tangent » intervenant dans la CML ? On distinguera les deux cas précédents, ainsi que l'influence du niveau du taux sans risque.*
  - *Le portefeuille tangent est constitué d'actifs risqués*
  - *La pente de la demi-droite reliant l'actif sans risque à un portefeuille est le ratio de Sharpe de ce portefeuille*
  - *Le portefeuille tangent maximise le ratio de Sharpe*
  - *Les deux graphiques suivants montrent deux situations correspondant à deux valeurs de* $\boldsymbol{R_F}$

Exercices finance de marché : Trois actifs, corrélations parfaites, pas de vente à découvert

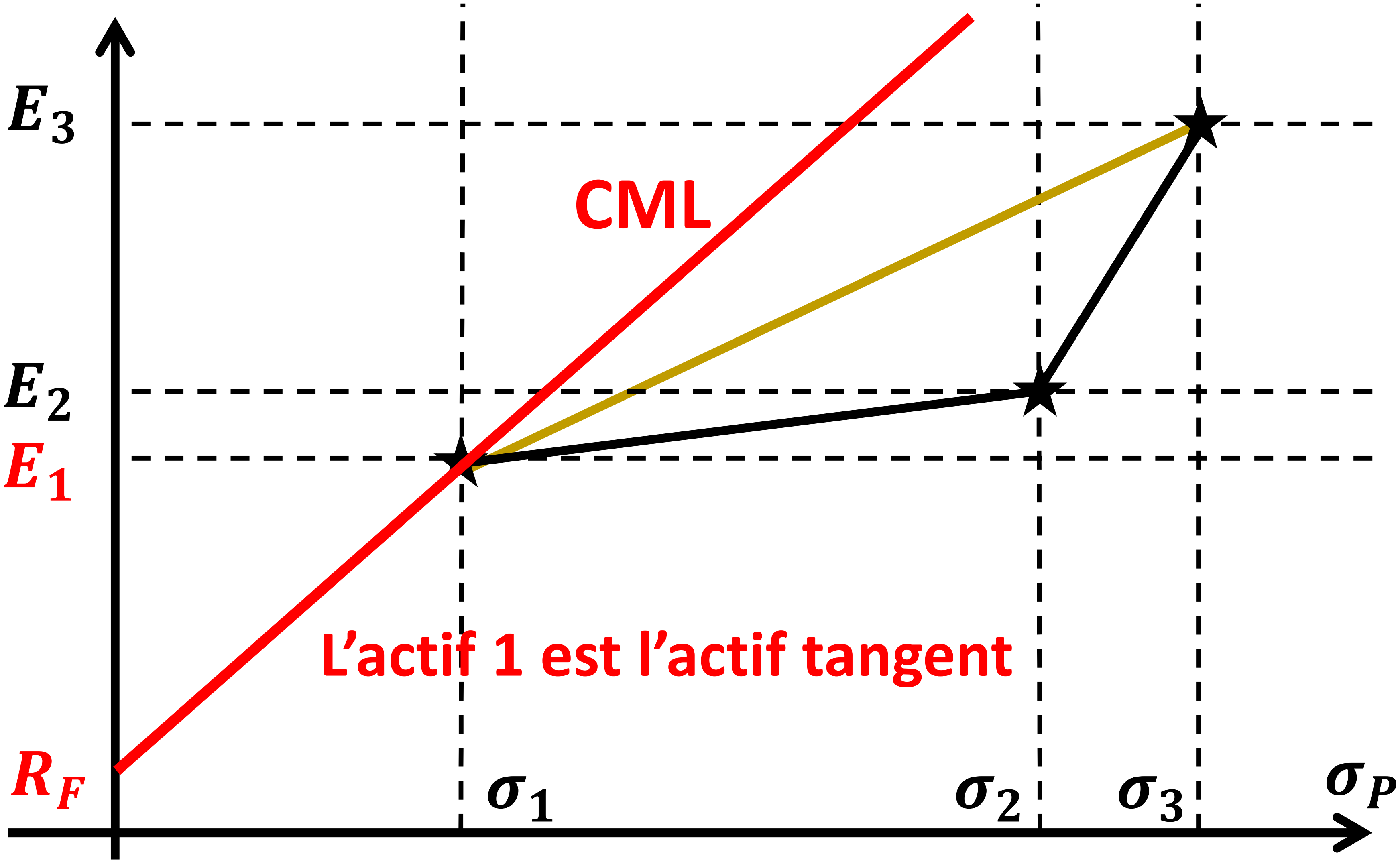
- Trois actifs, corrélations parfaites, pas de vente à découvert



L'actif 3 est l'actif tangent

Exercices finance de marché : Trois actifs, corrélations parfaites, pas de vente à découvert

- Trois actifs, corrélations parfaites, pas de vente à découvert



- Trois actifs, corrélations parfaites, pas de vente à découvert
  - *Selon la valeur du taux sans risque $\boldsymbol{R_F}$, le portefeuille tangent est toujours constitué uniquement d'un des trois actifs*
    - On omet les cas dégénérés où le portefeuille tangent n'est pas unique, correspondant à l'égalité des ratios de Sharpe.
  - *Le portefeuille tangent maximisant le ratio de Sharpe, il suffit donc de calculer les ratios de Sharpe des trois actifs*
  - *Le portefeuille tangent est constitué à 100% de l'actif de ratio de Sharpe maximal $\boldsymbol{E_i - R_F / \sigma_i}$*
    - Il n'y a aucune demande pour les deux autres actifs, qui sont parfaitement corrélés
    - Ils n'apportent donc aucun bénéfice en termes de diversification et ils sont dominés

Compléments finance de marché

- Les transparents suivants sont des compléments de cours
  - *Obtention formelle de la SML*
  - *Le modèle zéro beta de Black*
    - SML en l'absence de taux sans risque
  - *Limitation sur les ventes à découvert et choix de portefeuille*
    - Les restrictions sur les opérations financière permettant de vendre des titres à découvert sont fréquentes
    - Ceci est l'occasion de revenir sur tous les raisonnements liés à la frontière efficiente des actifs risqués, la CML et la SML
    - On peut vérifier que le modèle d'équilibre est robuste à une interdiction des ventes à découvert
    - La CML et la SML en particulier restent inchangées

Une des 2 démonstrations du Médaf

- **Idée de la démonstration**

$$E_i = R_f + \beta_i \times \left(E_M - R_f \right)$$

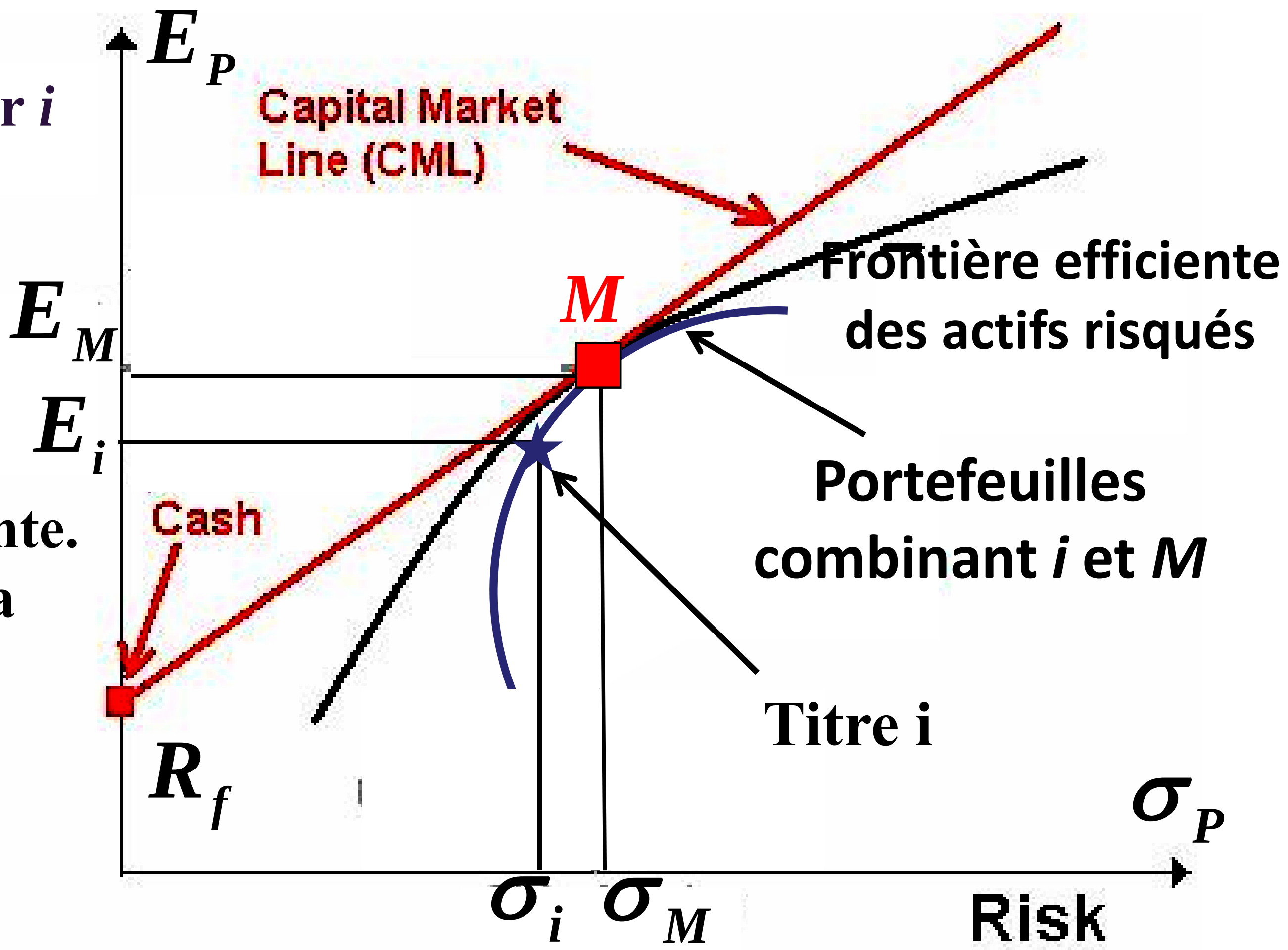
Constituer des portefeuilles combinant portefeuille de marché *M* et titre *i* :

1) Courbe violette passant par *i* et *M*.

2) Courbe en dessous de la frontière efficiente des actifs risqués.

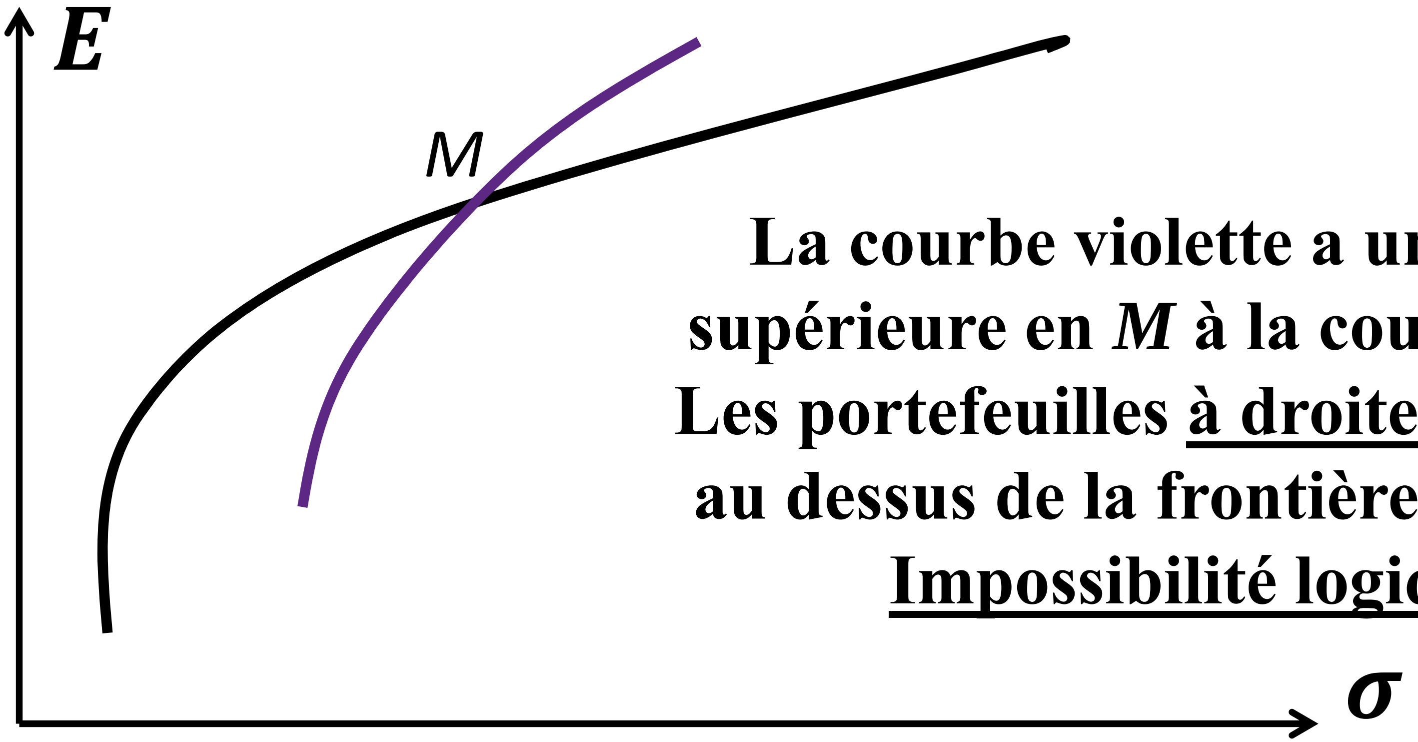
3) En *M* cette courbe est tangente à la frontière efficiente.

4) Sa pente en *M* est égale à la pente de la CML: $\frac{E_M - R_f}{\sigma_M}$



Une des 2 démonstrations du Médaf

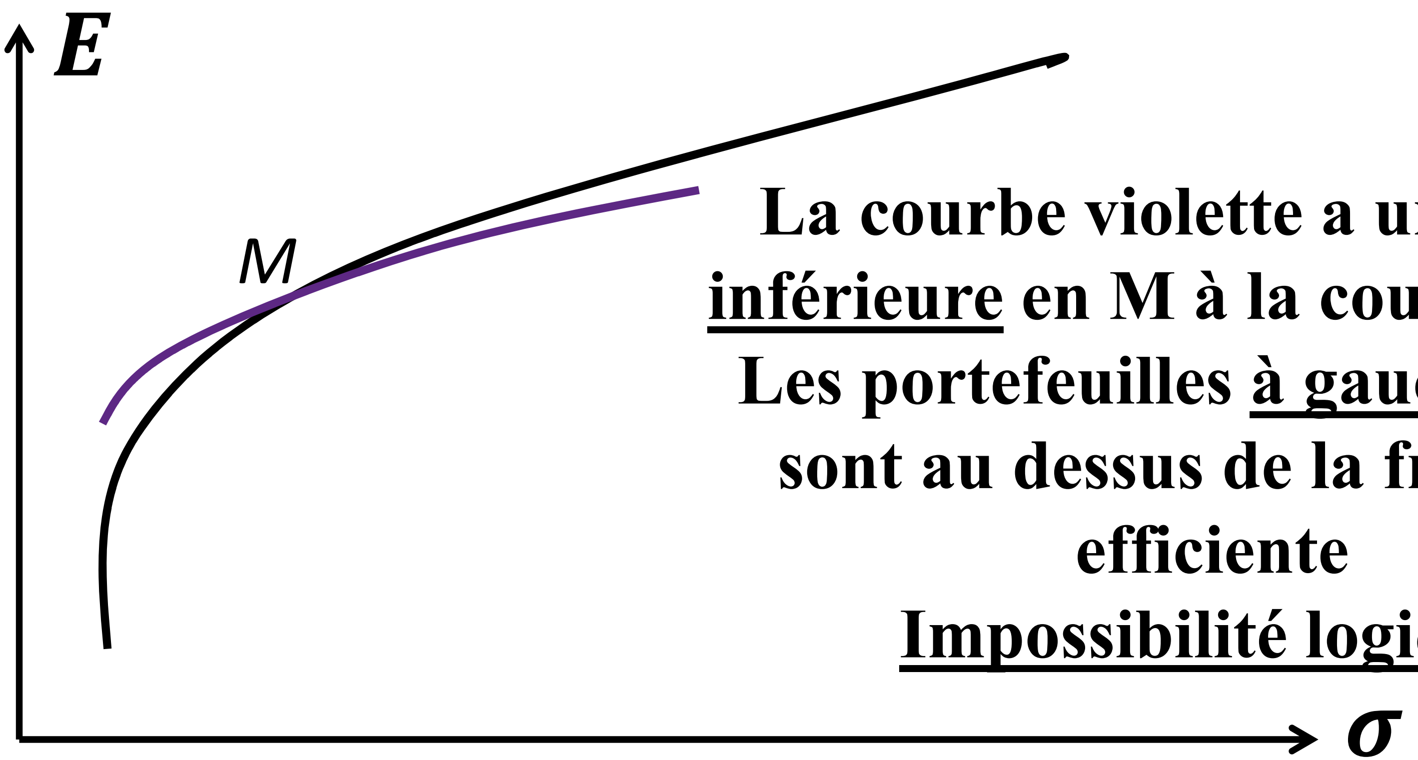
- En *M*, tangence entre la courbe violette
  - *Portefeuilles constitués du titre i et du portefeuille de marché M*
- Et courbe noire
  - *Frontière efficiente des actifs risqués*



La courbe violette a une pente supérieure en *M* à la courbe noire. Les portefeuilles <u>à droite</u> de *M* sont au dessus de la frontière efficiente
<u>Impossibilité logique</u>

Une des 2 démonstrations du Médaf

- En *M*, tangence entre la courbe violette
  - *Portefeuilles constitués du titre i et du portefeuille de marché M*
- Et courbe noire
  - *Frontière efficiente des actifs risqués*

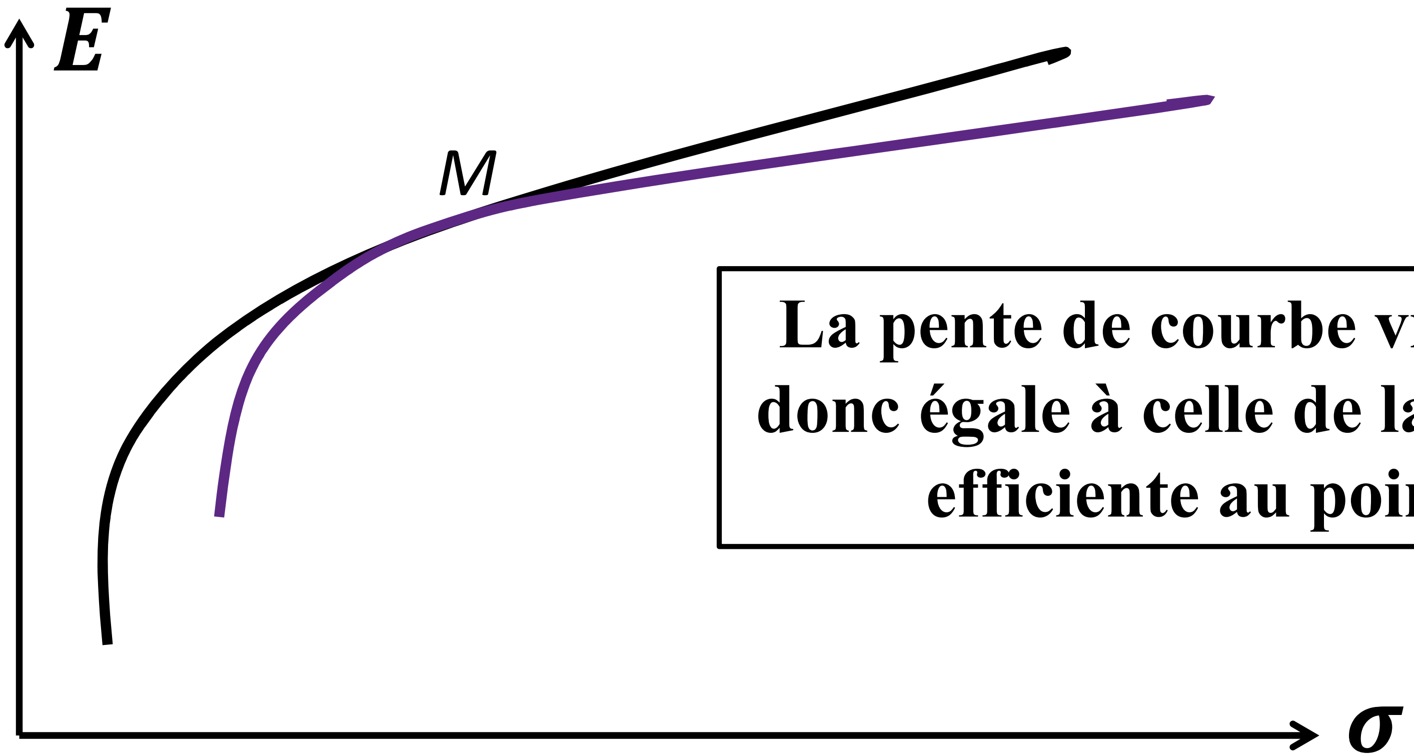


La courbe violette a une pente inférieure en M à la courbe noire. Les portefeuilles à gauche de M sont au dessus de la frontière efficiente

Impossibilité logique

Une des 2 démonstrations du Médaf

- En *M*, tangence entre la courbe violette
  - *Portefeuilles constitués du titre i et du portefeuille de marché M*
- Et courbe noire
  - *Frontière efficiente des actifs risqués*



La pente de courbe violette est donc égale à celle de la frontière efficiente au point *M*

Une des 2 démonstrations du Médaf

- *Proportion de la richesse investie dans le titre i :* $\boldsymbol{X}$
- *Proportion de la richesse investie dans le portefeuille de marché :* $\mathbf{1}-\boldsymbol{X}$
- $\boldsymbol{R_i}, \boldsymbol{R_M}$ *rentabilités titre i et portefeuille de marché*
- $\boldsymbol{E_i}, \boldsymbol{E_M}$ *espérances des rentabilités*
- $\boldsymbol{\sigma_i}, \boldsymbol{\sigma_M}$ *écart-types des rentabilités*
- $\boldsymbol{C_{iM}} = \mathbf{Cov}(\boldsymbol{R_i}, \boldsymbol{R_M})$ *covariance des rentabilités*
- $\boldsymbol{\beta_i} = \dfrac{\boldsymbol{C_{iM}}}{\boldsymbol{\sigma_M^2}}$ *Beta du titre i*
- *Rentabilité du portefeuille* $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}\boldsymbol{R_i} + (\mathbf{1}-\boldsymbol{X})\boldsymbol{R_M}$

Une des 2 démonstrations du Médaf

- Rentabilité du portefeuille constitué de titre *i* et de *M*

$$R(X) = XR_i + (1 - X)R_M$$

  - *Remarque : si tout est investi en portefeuille de marché* $R(X = 0) = R_M$

- Espérance de la rentabilité

$$E\left[R(X)\right] = XE_i + (1 - X)E_M$$

- Écart-type de la rentabilité

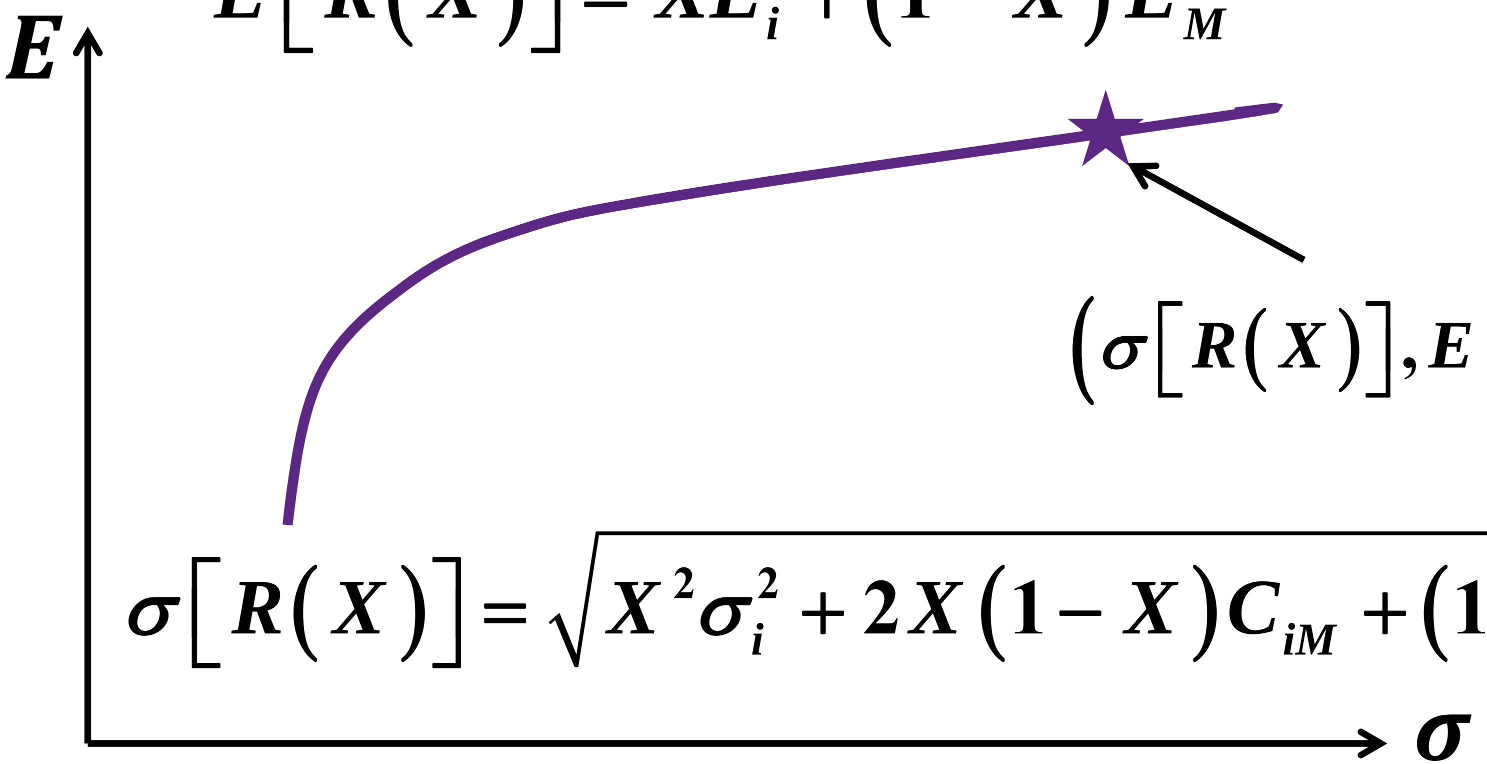
$$\sigma\left[R(X)\right] = \sqrt{X^2\sigma_i^2 + 2X(1 - X)C_{iM} + (1 - X)^2\sigma_M^2}$$

UNIVERSITÉ PARIS 1 - PANTHÉON - SORBONNE -

Une des 2 démonstrations du Médaf

- La courbe violette est formée par l'ensemble des points $(\boldsymbol{\sigma}[\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X})],\boldsymbol{E}[\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X})])$
  - *Courbe paramétrée par* ***X***

$$E\left[R\left(X\right)\right]=XE_i+\left(1-X\right)E_M$$

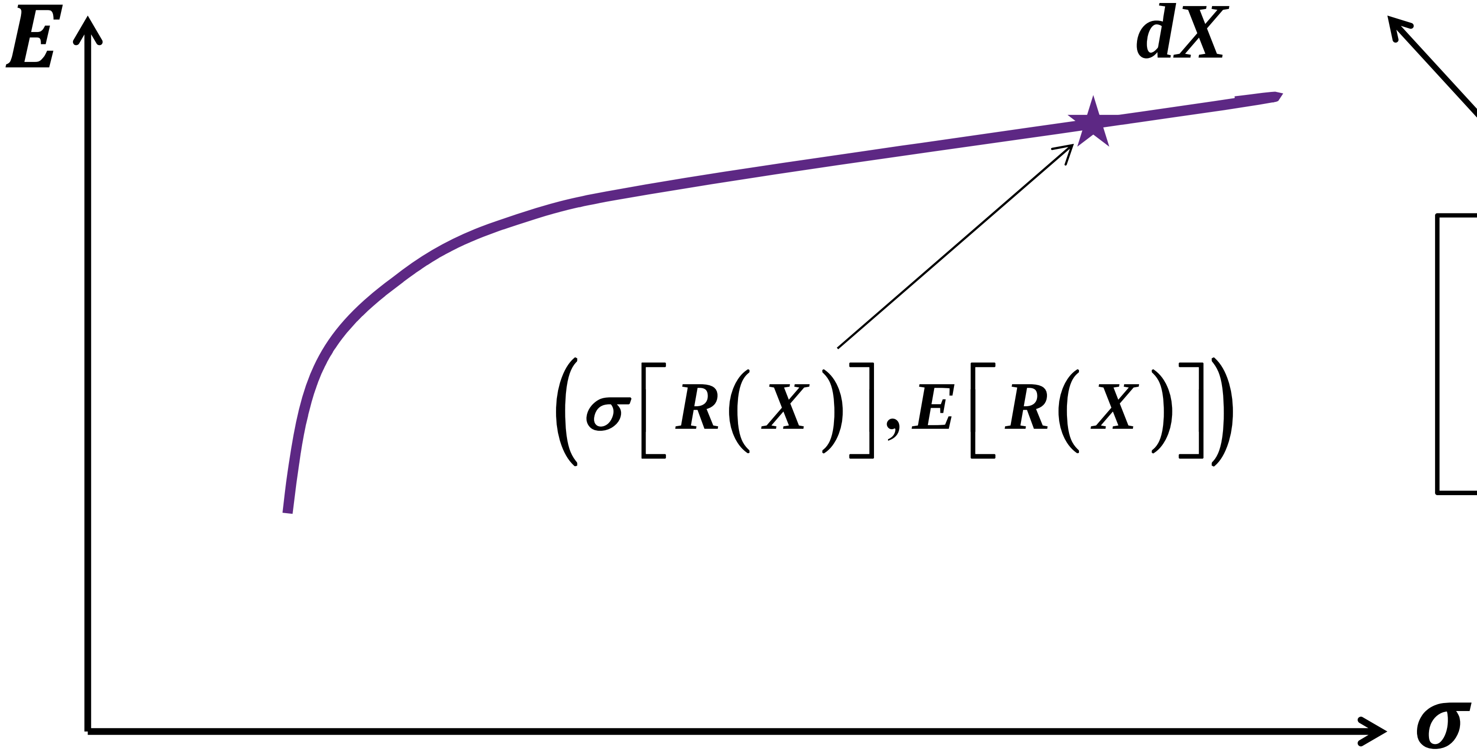


$$\sigma\left[R\left(X\right)\right]=\sqrt{X^2\sigma_i^2+2X\left(1-X\right)C_{iM}+\left(1-X\right)^2\sigma_M^2}$$

Une des 2 démonstrations du Médaf

- La pente de la courbe violette en un point X est donné par

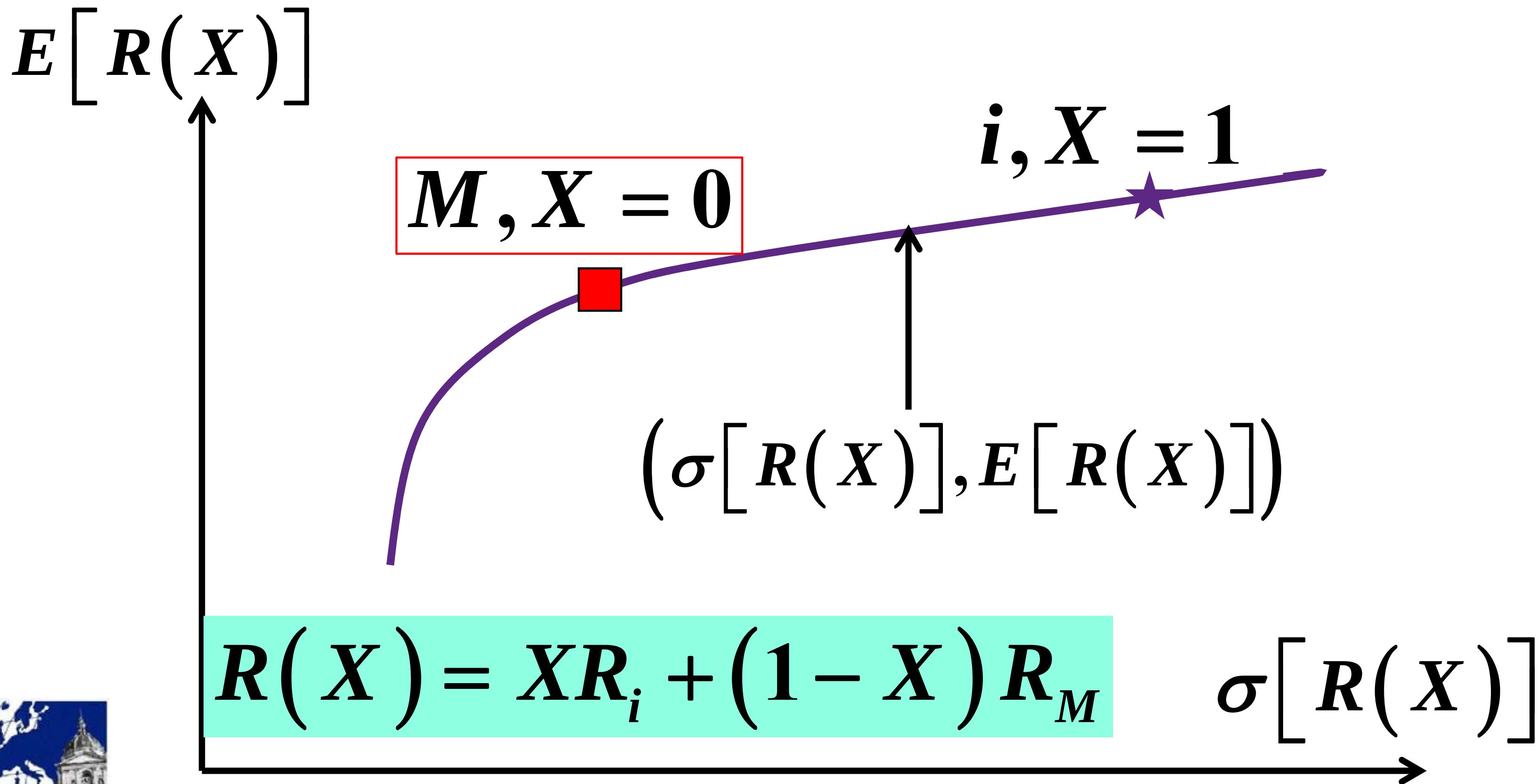
$$\frac{dE}{d\sigma}=\frac{dE\left[R(X)\right]}{d\sigma\left[R(X)\right]}=\frac{\dfrac{dE\left[R(X)\right]}{dX}}{\dfrac{d\sigma\left[R(X)\right]}{dX}}$$



Résultat d'analyse admis

Une des 2 démonstrations du Médaf

- Pour calculer la pente de la courbe reliant les points associés au titre *i* et au portefeuille de marché *M* :
  - *Il faut calculer* $\frac{dE[R(X)]}{dX}$ *et* $\frac{d\sigma[R(X)]}{dX}$



Une des 2 démonstrations du Médaf

- Calcul de la dérivée de l'espérance de la rentabilité du portefeuille par rapport à la quantité allouée en titre *i*, *X*

$$E\left[R(X)\right] = XE_i + (1 - X)E_M$$

$$\boxed{\frac{dE\left[R(X)\right]}{dX} = E_i - E_M}$$

  - *Ne dépend pas de X*
- Calcul de la dérivée de l'écart-type de la rentabilité du portefeuille par rapport à la quantité allouée en titre *i*, *X*

$$\sigma\left[R(X)\right] = \sqrt{X^2\sigma_i^2 + 2X(1 - X)C_{iM} + (1 - X)^2\sigma_M^2}$$

UNIVERSITÉ PARIS 1 – PANTHÉON - SORBONNE –

Une des 2 démonstrations du Médaf

- Calcul de la dérivée de l'écart-type de la rentabilité du portefeuille par rapport à la quantité allouée en titre *i*, *X*

$$\sigma\left[R\left(X\right)\right]=\sqrt{X^{2}\sigma_{i}^{2}+2X\left(1-X\right)C_{iM}+\left(1-X\right)^{2}\sigma_{M}^{2}}$$

  - *On a besoin de connaître la dérivation des fonctions composées*

$$\frac{df\left(g(X)\right)}{dX}=\frac{dg\left(X\right)}{dX}\times\frac{df\left(y=g(X)\right)}{dy}$$

  - *Dans notre cas* $\dfrac{df\left(g(X)\right)}{dX}=\dfrac{dg\left(X\right)}{dX}\times\dfrac{df\left(y=g(X)\right)}{dy}$
  - *et* $\begin{cases} f\left(y\right)=\sqrt{y} \\ g(X)=\mathrm{Var}\left[R\left(X\right)\right] \end{cases}$

Une des 2 démonstrations du Médaf

- Calcul de la dérivée de l'écart-type de la rentabilité du portefeuille par rapport à la quantité allouée en titre *i*, *X*

$$g(X) = \mathrm{Var}\left[R(X)\right] = X^2\sigma_i^2 + 2X(1-X)C_{iM} + (1-X)^2\sigma_M^2$$

- D'où $\dfrac{dg(X)}{dX} = 2X\sigma_i^2 + 2(1-2X)C_{iM} - 2(1-X)\sigma_M^2$

- $f(y) = \sqrt{y}$ d'où $\dfrac{df(y)}{dy} = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}$

$$\frac{df\left(y = g(X)\right)}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{g(X)}} = \frac{1}{2\sqrt{\mathrm{Var}\left[R(X)\right]}} = \frac{1}{2\sigma\left[R(X)\right]}$$

UNIVERSITÉ PARIS 1 – PANTHÉON - SORBONNE –

Une des 2 démonstrations du Médaf

- Calcul de la dérivée de l'écart-type de la rentabilité du portefeuille par rapport à la quantité allouée en titre *i*, *X*

$$\frac{d\sigma\left[R(X)\right]}{dX} = \frac{dg(X)}{dX} \times \frac{df\left(y = g(X)\right)}{dy}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dg(X)}{dX} = 2X\sigma_i^2 + 2(1-2X)C_{iM} - 2(1-X)\sigma_M^2 \\ \dfrac{df\left(y = g(X)\right)}{dy} = \dfrac{1}{2\sigma\left[R(X)\right]} \end{cases}$$

$$\frac{d\sigma\left[R(X)\right]}{dX} = \frac{X\sigma_i^2 + (1-2X)C_{iM} - (1-X)\sigma_M^2}{\sigma\left[R(X)\right]}$$

Une des 2 démonstrations du Médaf

- La pente de la courbe reliant le titre *i* au portefeuille de marché *M* est donc donnée par :

$$\frac{dE}{d\sigma} = \frac{dE\left[R(X)\right]}{d\sigma\left[R(X)\right]} = \frac{\dfrac{dE\left[R(X)\right]}{dX}}{\dfrac{d\sigma\left[R(X)\right]}{dX}}$$

  - *avec* $\begin{cases} \dfrac{d\sigma\left[R(X)\right]}{dX} = \dfrac{X\sigma_i^2 + (1-2X)C_{iM} - (1-X)\sigma_M^2}{\sigma\left[R(X)\right]} \\ \dfrac{dE\left[R(X)\right]}{dX} = E_i - E_M \end{cases}$

  - *Il faut calculer cette pente au point M, c'est-à-dire quand*

$$X = 0, R(X) = R_M$$

UNIVERSITÉ PARIS 1 – PANTHÉON - SORBONNE –

Une des 2 démonstrations du Médaf

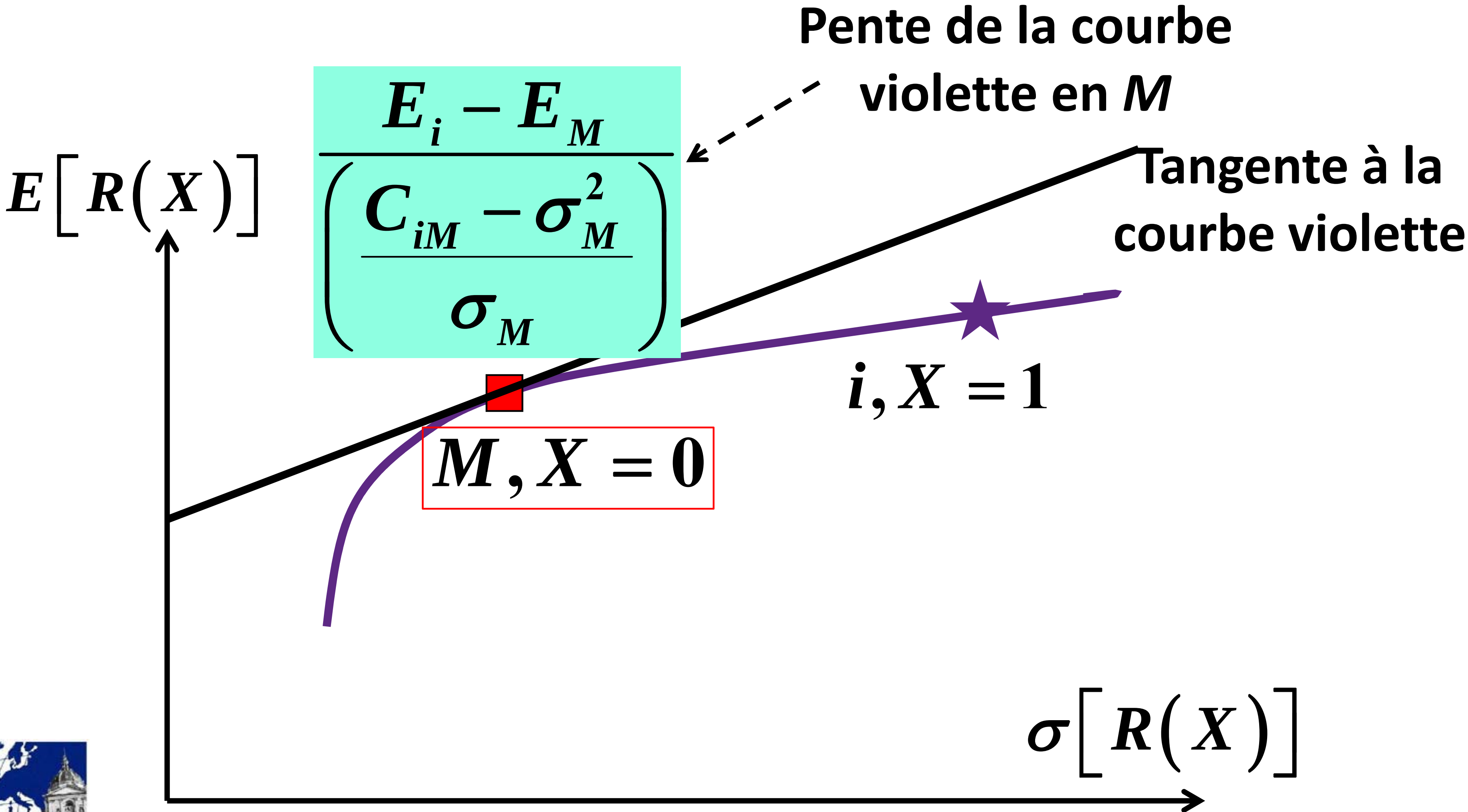
- Pente de la courbe reliant le titre *i* au portefeuille de marché *M* au point *M* correspondant à $X = 0$

$$\begin{cases} \left.\dfrac{d\sigma\left[R(X)\right]}{dX}\right|_{X=0} = \dfrac{C_{iM} - \sigma_M^2}{\sigma_M} \\ \left.\dfrac{dE\left[R(X)\right]}{dX}\right|_{X=0} = E_i - E_M \end{cases}$$

$$\left.\frac{dE}{d\sigma}\right|_{X=0} = \left.\frac{\dfrac{dE\left[R(X)\right]}{dX}}{\dfrac{d\sigma\left[R(X)\right]}{dX}}\right|_{X=0} = \frac{E_i - E_M}{\left(\dfrac{C_{iM} - \sigma_M^2}{\sigma_M}\right)}$$

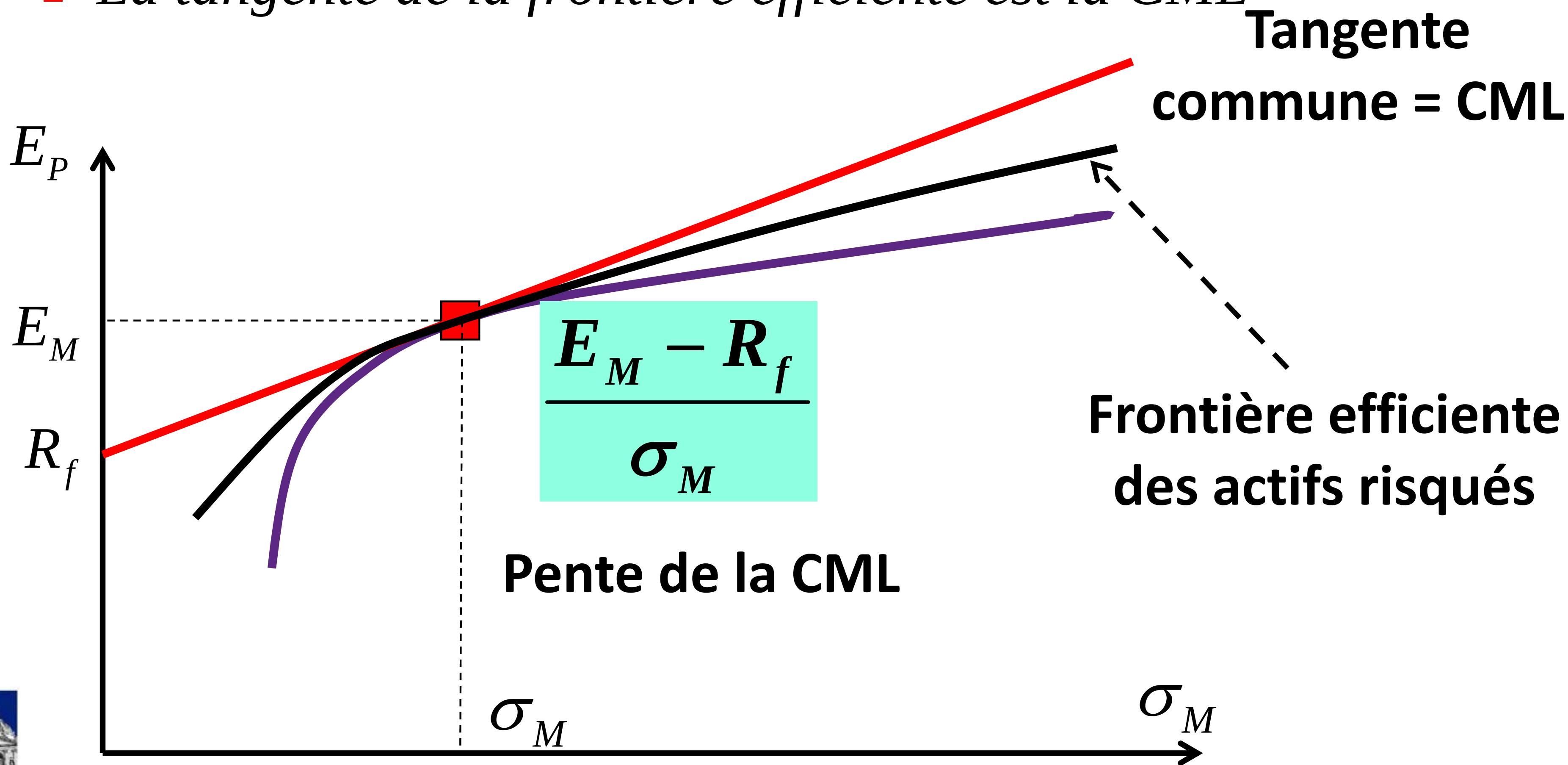
Une des 2 démonstrations du Médaf

- Pente de la courbe reliant les points associés au titre *i* et au portefeuille de marché *M* :



Une des 2 démonstrations du Médaf

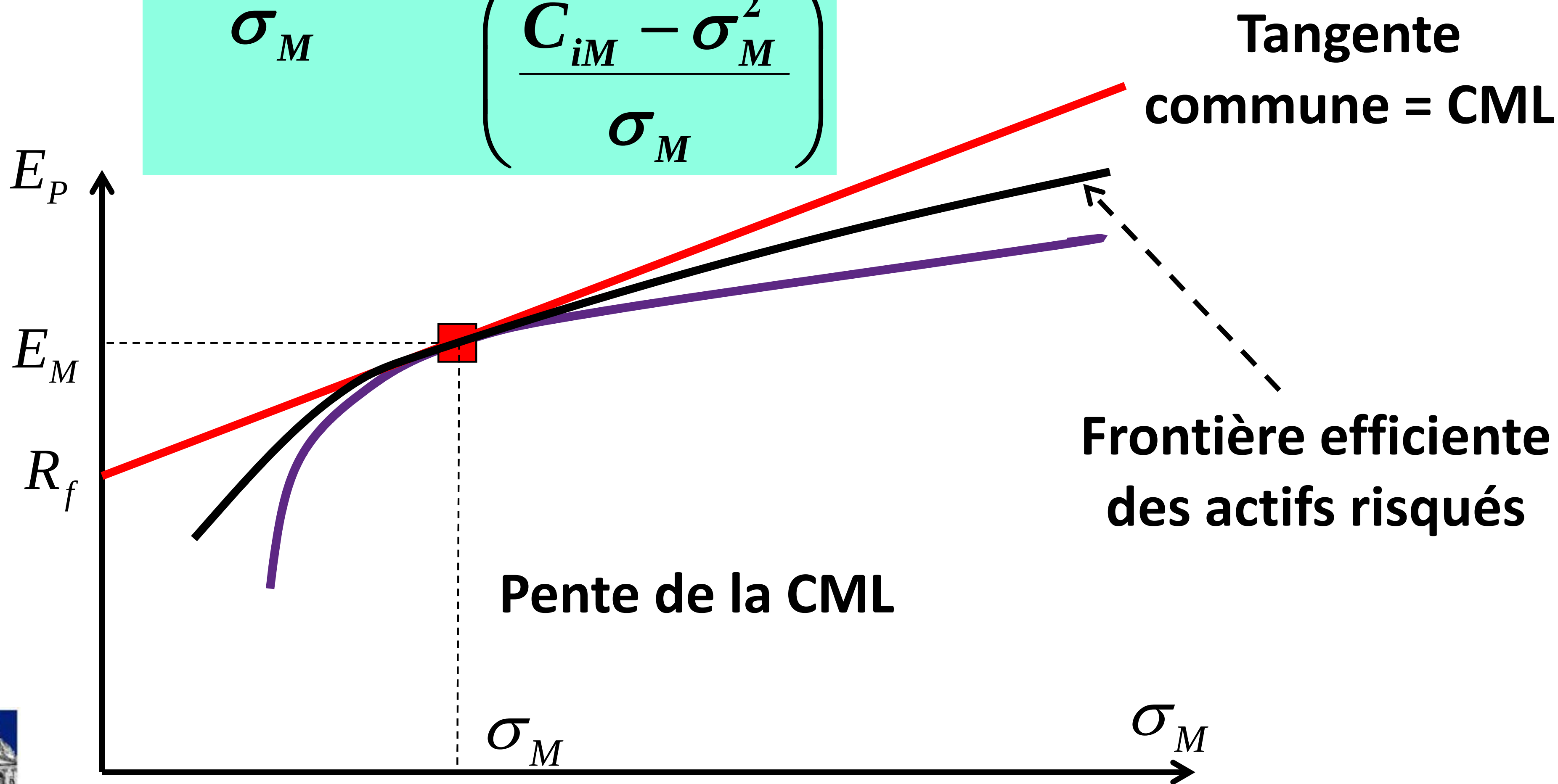
- La pente de la courbe violette en *M* est égale à la pente de la frontière efficiente en *M*
  - *Les tangentes des courbes violette et noire sont identiques*
  - *La tangente de la frontière efficiente est la CML*



Une des 2 démonstrations du Médaf

- L'égalité des pentes donne l'équation suivante :

$$\frac{E_M - R_f}{\sigma_M} = \frac{E_i - E_M}{\left(\frac{C_{iM} - \sigma_M^2}{\sigma_M}\right)}$$



Une des 2 démonstrations du Médaf

- Ceci va permettre d'obtenir l'espérance de rentabilité du titre *i* :

$$\frac{E_M - R_f}{\sigma_M} = \frac{E_i - E_M}{\left(\dfrac{C_{iM} - \sigma_M^2}{\sigma_M}\right)} \Rightarrow E_i - E_M = \left(\frac{C_{iM}}{\sigma_M^2} - 1\right) \times \left(E_M - R_f\right)$$

  - *En développant le terme de droite et après simplification*

$$E_i = R_f + \frac{C_{iM}}{\sigma_M^2} \times \left(E_M - R_f\right)$$

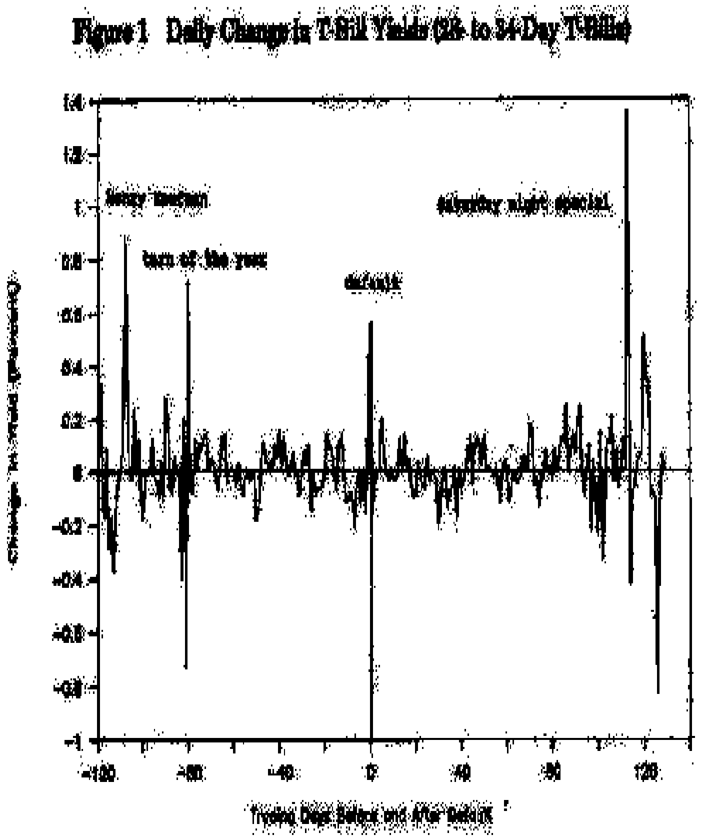
  - *Ou encore* $E_i = R_f + \beta_i \times (E_M - R_f)$

Le modèle « zéro-beta » de Black

- L'existence d'un taux « sans risque » $\boldsymbol{R_f}$ ne va pas de soi
  - *Il n'existe pas d'émetteur exempt de risque de défaut*
  - *Les banques font faillite*
    - Lehman Brothers (2008), Washington Mutual (2008) aux États-Unis
    - Plus récemment, banques chypriotes : Laiki, Bank of Cyprus (2013)
    - Les garanties implicites données aux emprunteurs diminuent
    - Bails-in plutôt que Bails-outs
  - *Les états font aussi défaut*
    - Grèce (2012), dette fédérale des États-Unis (1979, 2013 ?)
    - L'introduction de clauses d'action collectives dans les dettes des Etats de la zone euro est-il le prélude à des annulations partielles de dette comme un instrument « courant » de gestion
    - Techniquement, échanges forcés de dette, plutôt qu'annulations

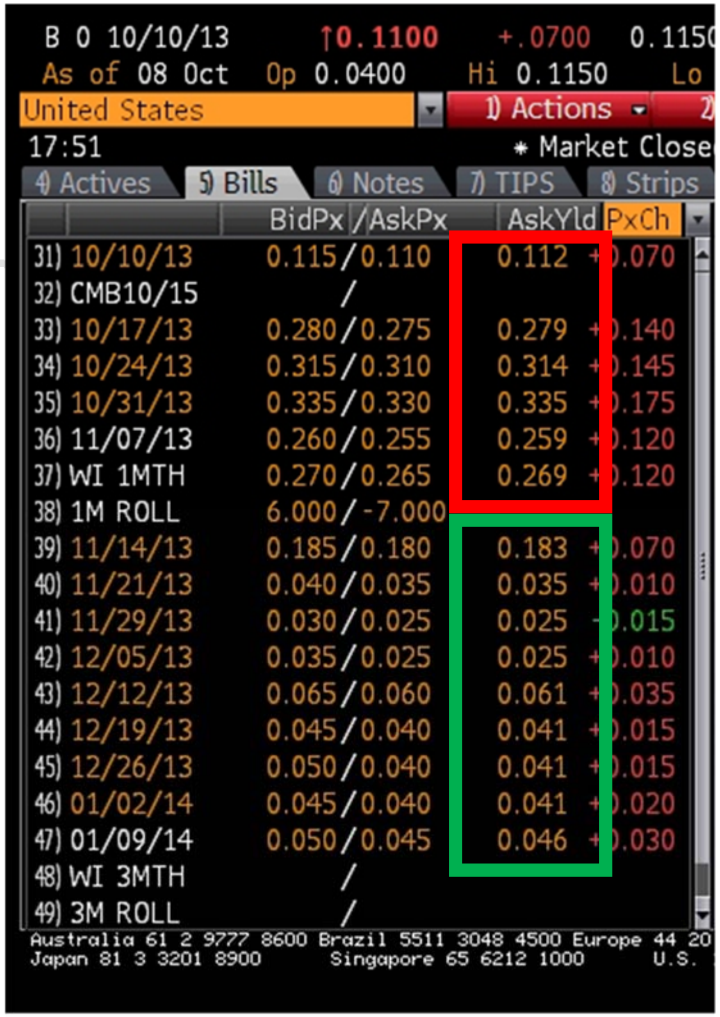
Le modèle « zéro-beta » de Black

- Existence d'un taux sans risque $\boldsymbol{R_f}$?
  - *« Petit défaut » temporaire de 1979*
    - http://dmarron.com/2011/05/26/the-day-the-united-states-defaulted-on-treasury-bills/
    - Augmentation d'environ 0,6% des taux des Treasury Bills (emprunts d'État à court-terme)
    - Cette augmentation n'a pas été compensée par une diminution immédiate quand le problème a fini par être résolu
  - *Échéance du 17 octobre 2013*
    - *There's still a lot of confusion about what October 17 represents when it comes to the debt ceiling and the risk of a U.S. default.*
    - CNN, 10 octobre 2013



Le modèle « zéro-beta » de Black

- Existence d'un taux sans risque R_f
  - *Niveau des taux des Treasury Bills*
    - Le 8 octobre 2013
    - Source Bloomberg
    - Rectangle rouge : taux en % pour des échéances inférieures à 1 mois
    - Le 10/10, le 17/10, le 24/10, …
    - Rectangle vert : taux pour des échéances un peu plus lointaines
    - Ces taux sont presque nuls
    - Les craintes se concentrent sur les échéances courtes
  - *Autres taux de référence à un mois*
    - Interbancaire, repos, strips, OIS, CP, …



B 0 10/10/13 ↑0.1100 +.0700 0.1150
As of 08 Oct Op 0.0400 Hi 0.1150 Lo
United States 1) Actions
17:51 * Market Close
4) Actives 5) Bills 6) Notes 7) TIPS 8) Strips

	BidPx/AskPx	AskYld	PxCh
31) 10/10/13	0.115/0.110	0.112	+0.070
32) CMB10/15	/		
33) 10/17/13	0.280/0.275	0.279	+0.140
34) 10/24/13	0.315/0.310	0.314	+0.145
35) 10/31/13	0.335/0.330	0.335	+0.175
36) 11/07/13	0.260/0.255	0.259	+0.120
37) WI 1MTH	0.270/0.265	0.269	+0.120
38) 1M ROLL	6.000/-7.000		
39) 11/14/13	0.185/0.180	0.183	+0.070
40) 11/21/13	0.040/0.035	0.035	+0.010
41) 11/29/13	0.030/0.025	0.025	-0.015
42) 12/05/13	0.035/0.025	0.025	+0.010
43) 12/12/13	0.065/0.060	0.061	+0.035
44) 12/19/13	0.045/0.040	0.041	+0.015
45) 12/26/13	0.050/0.040	0.041	+0.015
46) 01/02/14	0.045/0.040	0.041	+0.020
47) 01/09/14	0.050/0.045	0.046	+0.030
48) WI 3MTH	/		
49) 3M ROLL	/		

Australia 61 2 9777 8600 Brazil 5511 3048 4500 Europe 44 20
Japan 81 3 3201 8900 Singapore 65 6212 1000 U.S.

Tbills	**.27**
Short Coupons	**.32 (October 31 maturity)**
UST Repo	**.16**
OIS	**.11**
Libor	**.174**
US Financial CP	**.13**

Les taux interbancaires non sécurisés sont inférieurs aux taux de la dette publique …

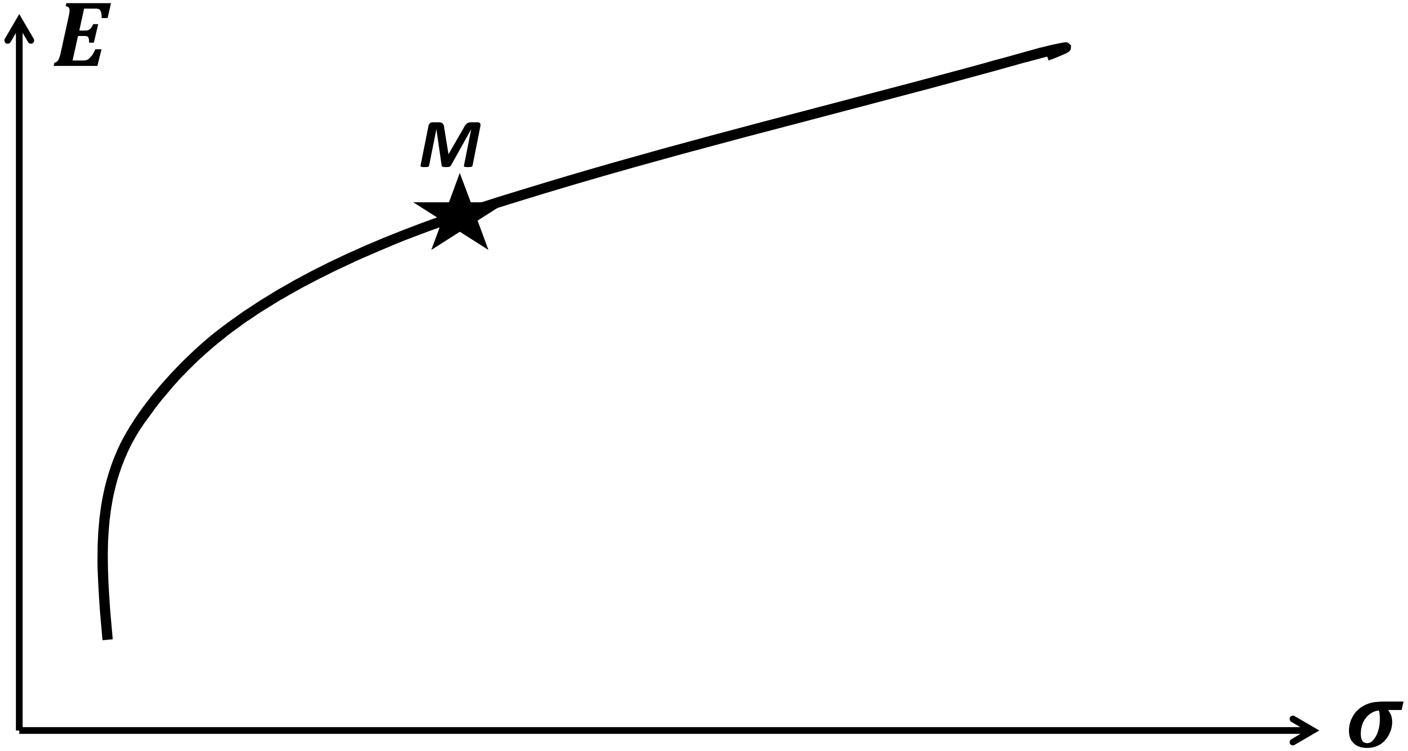
– PANTHÉON - SORBONNE – UNIVERSITÉ PARIS 1

Le modèle « zéro-beta » de Black

- Fischer Black a montré en 1972 qu’on pouvait s’affranchir de l’existence d’un placement sans risque
  - Ce qui est plutôt une bonne chose …
  - La démonstration fait appel aux résultats et raisonnements déjà vus en cours et à un résultat supplémentaire :
- *Théorème de séparation en deux fonds pour la frontière efficiente des actifs risqués*
  - En l’absence de contraintes sur les montants de titres achetés ou vendus, les portefeuilles sur la frontière efficiente sont constitués à partir de deux portefeuilles **arbitraires** pris sur cette frontière
    - On peut donc se ramener au cas déjà étudié des deux titres
    - Les investisseurs ne détiennent donc que des portefeuilles composés de ces deux titres
    - Le portefeuille de marché (demande agrégée) est donc lui-même composé de ces deux « fonds » et est donc sur la frontière efficiente

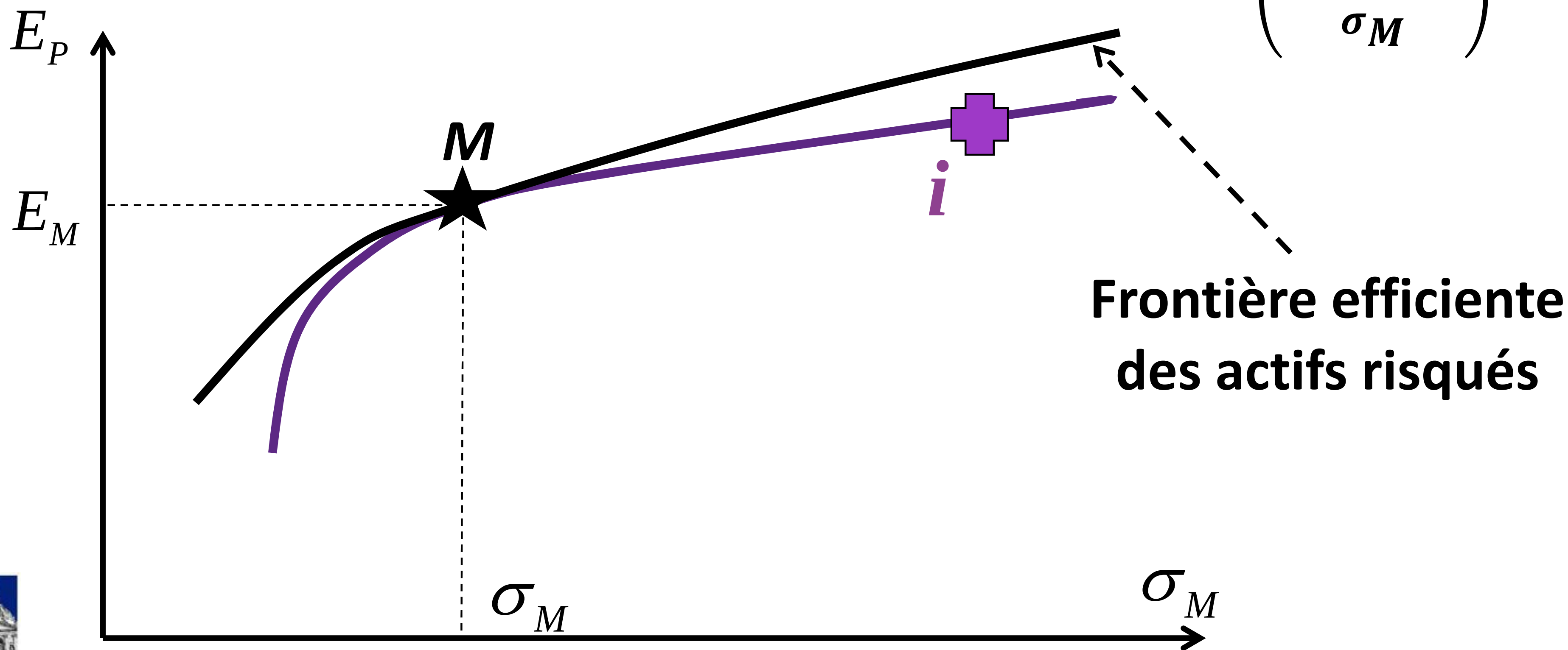
Le modèle « zéro-beta » de Black

- Le portefeuille de marché *M* est sur la frontière efficiente des actifs risqués
  - *On peut prendre M comme l'un des deux fonds de base*
  - *La rentabilité des portefeuilles sur la frontière est de la forme* $\boldsymbol{R = XR_M + (1 - X)R_Z}$



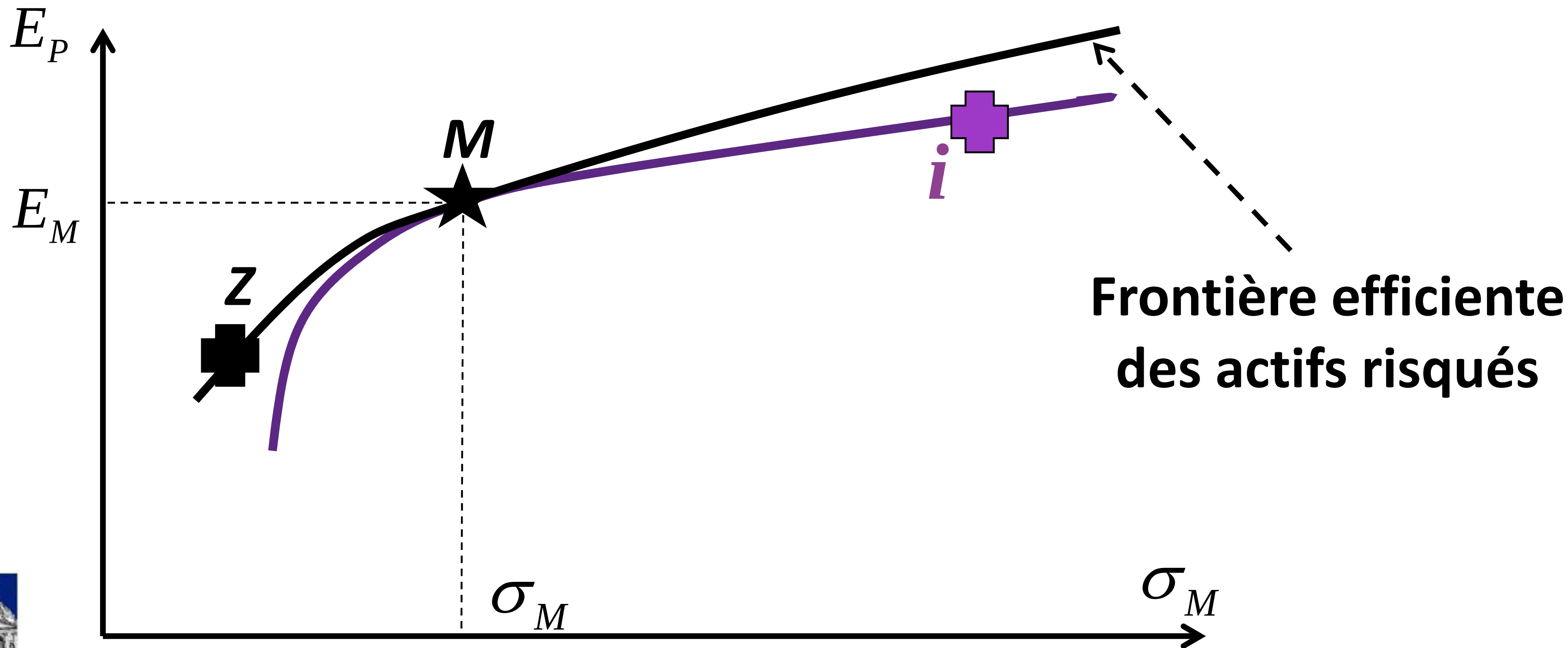
Le modèle « zéro-beta » de Black

- La démonstration du MEDAF repose sur la tangence au point ***M*** entre la frontière efficiente (en noir) et l'ensemble des portefeuilles formé de M et du titre ***i*** (courbe mauve)
  - *On a démontré que la pente de la courbe mauve est* $\dfrac{E_i - E_M}{\left(\dfrac{C_{iM} - \sigma_M^2}{\sigma_M}\right)}$



Le modèle « zéro-beta » de Black

- On a vu que la pente de la courbe mauve (en M) est $\dfrac{E_i - E_M}{\left(\dfrac{c_{iM} - \sigma_M^2}{\sigma_M}\right)}$
- De même la pente de la courbe noire est $\dfrac{E_Z - E_M}{\left(\dfrac{c_{ZM} - \sigma_M^2}{\sigma_M}\right)} = \dfrac{E_i - E_M}{\left(\dfrac{c_{iM} - \sigma_M^2}{\sigma_M}\right)}$



Le modèle « zéro-beta » de Black

- Fin de la démonstration et établissement du résultat
  - *Choisissons* $\boldsymbol{Z}$ *sur la frontière efficiente, tel que* $\boldsymbol{C_{ZM} = 0}$
  - *Rappel de notations* $\boldsymbol{C_{ZM} = \mathrm{Cov}(R_M, R_Z)}$
  - $\boldsymbol{\beta_Z = \mathrm{Cov}(R_Z, R_M)/\sigma_M^2 = 0}$
  - ***Z : portefeuille zéro-beta***
    - Remarque : on peut toujours se ramener au cas $\boldsymbol{C_{ZM} = 0}$
    - Sinon on prend $\boldsymbol{Z'}$ tel que $\boldsymbol{R_{Z'} = XR_M + (1 - X)R_Z}$
    - $\boldsymbol{\beta_{Z'} = X\beta_M + (1 - X)\beta_Z = X \times 1 + (1 - X)\beta_Z}$
    - Il suffit de prendre $\boldsymbol{X = \beta_Z/(\beta_Z - 1)}$ pour que $\boldsymbol{\beta_{Z'} = 0}$
  - $\dfrac{E_Z - E_M}{\left(\dfrac{C_{ZM} - \sigma_M^2}{\sigma_M}\right)} = \dfrac{E_i - E_M}{\left(\dfrac{C_{iM} - \sigma_M^2}{\sigma_M}\right)}$ *devient* $\dfrac{E_Z - E_M}{-\sigma_M} = \dfrac{E_i - E_M}{\left(\dfrac{C_{iM} - \sigma_M^2}{\sigma_M}\right)}$
  - *Après simplification :* $\boldsymbol{E_i = E_Z + \beta_i \times (E_M - E_Z)}$

Le modèle « zéro-beta » de Black

- $\boldsymbol{E_i = E_Z + \beta_i \times (E_M - E_Z)}$
- On obtient une relation affine entre espérance de rentabilité du titre i, $\boldsymbol{E_i}$ et beta du titre, $\boldsymbol{\beta_i}$.
  - *Cette relation est presque identique à celle du Médaf*
- $\boldsymbol{E_i = R_f + \beta_i \times (E_M - R_f)}$
- Il suffit de remplacer la rentabilité du placement sans risque $\boldsymbol{R_f}$ par l'espérance du taux de rentabilité du portefeuille zéro-beta $\boldsymbol{E_Z}$
  - *Le Médaf subsiste donc même en l'absence d'un taux sans risque*
  - *La détermination de $\boldsymbol{R_f}$ ou de $\boldsymbol{E_Z}$ est un autre sujet d'importance*
  - *Black a également développé une extension du Médaf quand les taux des emprunts sont plus élevés que ceux des prêts*

Impact d'une limitation des ventes à découvert

- Effets pour les investisseurs d'une interdiction des ventes à découvert ?
  - Interdiction pouvant venir des États
  - **De règles internes de gestion des SICAV**
  - *Les investisseurs ne peuvent pas détenir de quantités négatives des titres* $\boldsymbol{i = 1, \dots, I}$
  - *Les fractions de la richesse investie dans les titres sont positives ou nulles :* $\boldsymbol{X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, \dots, X_I \geq 0}$
  - *Effets sur la frontière efficiente des actifs risqués ?*
    - Déplacement vers le bas, concavité
    - Théorème de séparation en deux fonds
  - *Effets sur la SML : absence d'effets …*

Frontière efficiente sans ventes à découvert

- Formulation mathématique du problème
  - *Portefeuilles maximisant l'espérance de rentabilité*

$$\mathbf{Max}_{X_1,\ldots,X_I} E_P = \sum_{i=1}^{I} X_i E_i \qquad \sum_{i=1}^{I} X_i = 1$$

  - *Optimisation sur l'ensemble des titres* $\boldsymbol{i = 1, \ldots, I}$
  - *Niveau d'écart-type des rentabilités donné*

$$\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{I} X_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1, j\neq i}^{I} \rho_{ij} X_i X_j \sigma_i \sigma_j = \mathbf{constante}$$

  - *Contraintes d'interdiction de ventes à découvert*

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, \ldots, X_I \geq 0$$

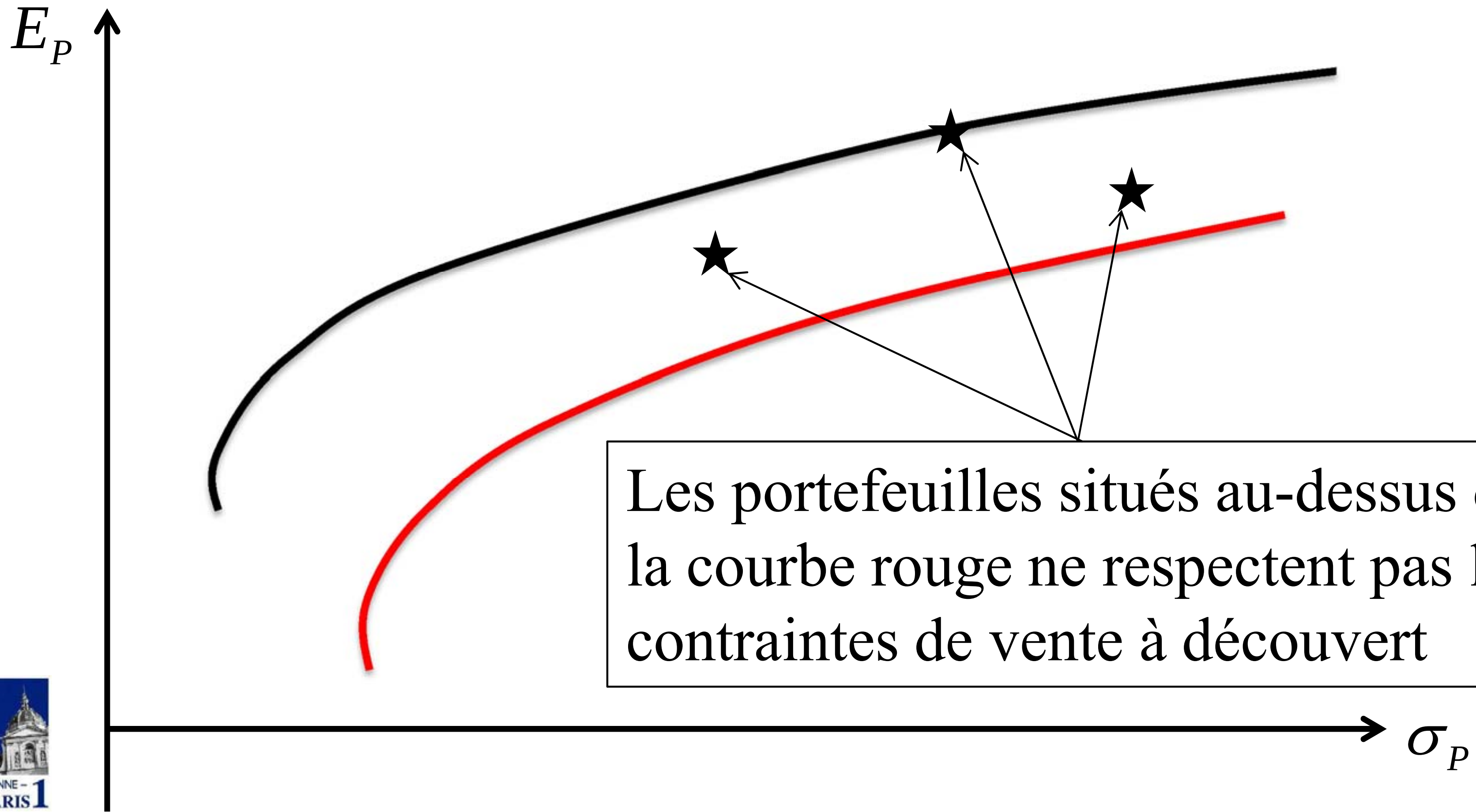
Frontière efficiente sans ventes à découvert

- Contraintes supplémentaires liées à l'impossibilité de vendre à découvert :
  - $\boldsymbol{X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, \ldots, X_I \geq 0}$
  - *L'ensemble des portefeuilles* $(\boldsymbol{X_1, X_2, \ldots, X_I})$ *admissibles*
  - *Est plus petit que l'ensemble des compositions de portefeuilles quand les ventes à découvert sont autorisées.*
  - *Pour un niveau donné d'écart-type de rentabilité, l'espérance maximale que l'on peut obtenir est plus faible.*
    - puisqu'on maximise l'espérance sur un ensemble de portefeuilles plus petit.
  - *La frontière efficiente des actifs risqués se déplace donc vers le bas*

Frontière efficiente

A priori, l'impossibilité de vendre à découvert pénalise les investisseurs déplacement vers le bas de la frontière efficiente

- Frontières efficientes des actifs risqués
  - *Sans interdiction de vente à découvert (en noir)*
  - *Sans vente à découvert (en rouge)*



Frontière efficiente sans ventes à découvert

- Concavité de la frontière efficiente
  - En cas d'interdiction des ventes à découvert
    - *Soit A et B deux portefeuilles sur la frontière efficiente*
    - *On peut constituer un portefeuille à partir de A et de B*
    - $\boldsymbol{X_1 = X}$ *proportion de la richesse investie dans A,*
    - $\boldsymbol{X_2 = 1 - X}$, *proportion de la richesse investie dans B*
    - *Reprenons la démonstration déjà faite en l'absence de contrainte sur les ventes à découvert*
    - *Transparents suivants*

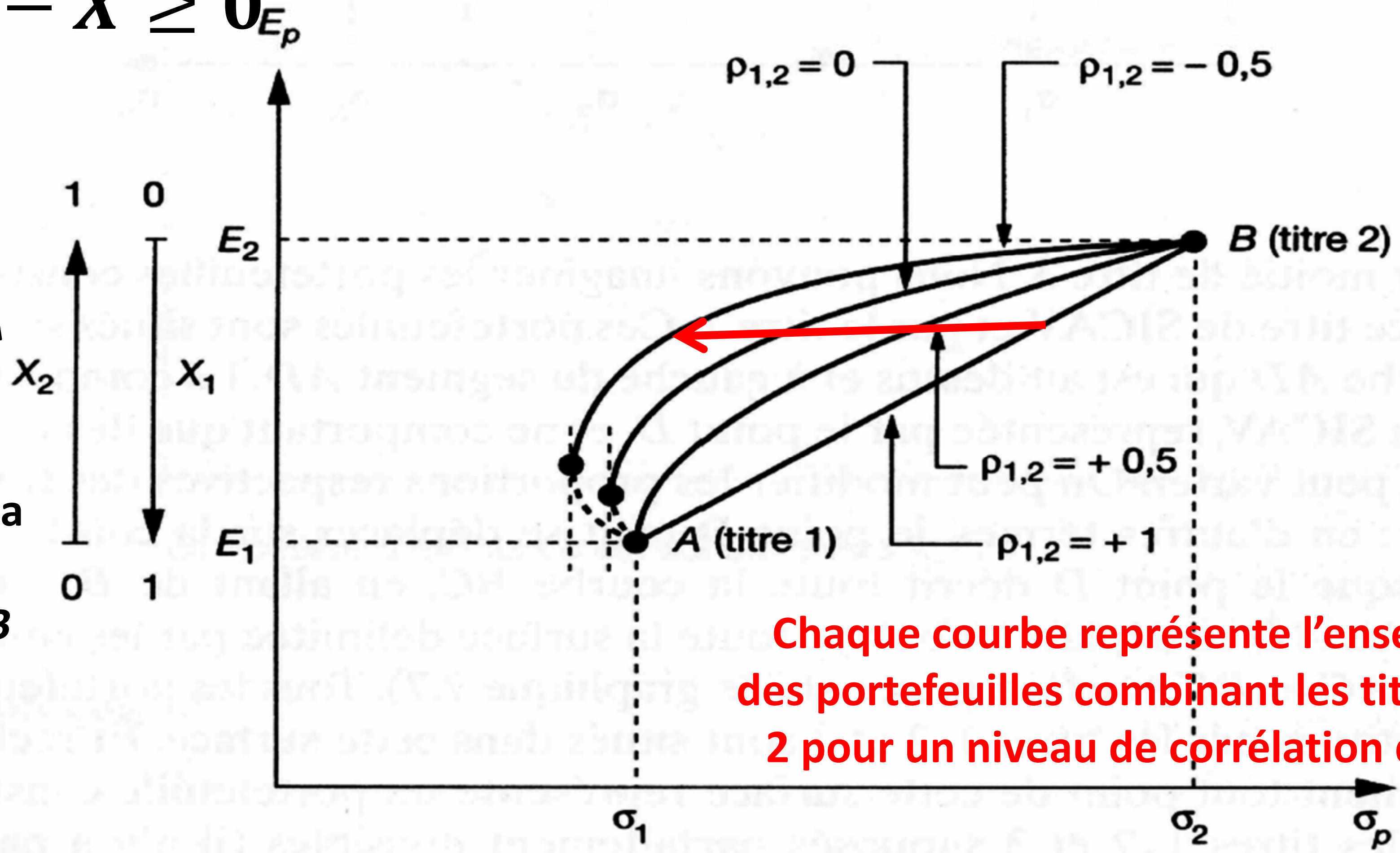
portefeuilles constitués de A et B pour différents niveaux du coefficient de corrélation

Graphique 2.6 – *Portefeuilles de 2 titres – Rôle du coefficient de corrélation* $\rho_{1,2}$

$$X \geq 0, 1 - X \geq 0$$

$X_1 = X$
proportion de la richesse investie dans *A*

$X_2 = 1 - X$
proportion de la richesse investie dans *B*

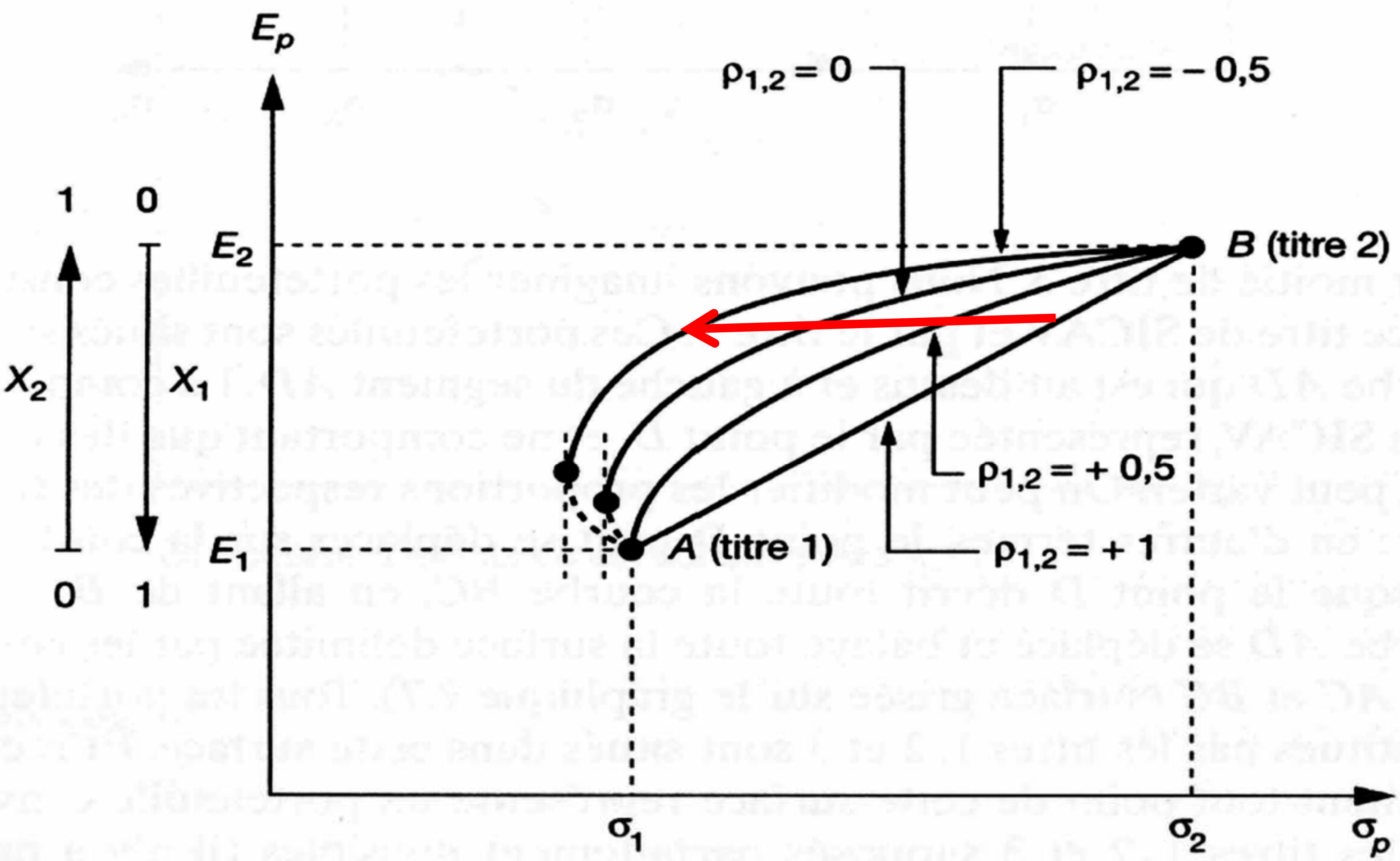


Chaque courbe représente l'ensemble des portefeuilles combinant les titres 1 et 2 pour un niveau de corrélation donné

$$\sigma_P^2 = X_1^2\sigma_1^2 + 2\rho_{1,2}X_1X_2\sigma_1\sigma_2 + X_2^2\sigma_2^2$$

Pour tout niveau de corrélation, un portefeuille combinant A et B en quantités positives se situe à gauche de la corde qui relie A et B

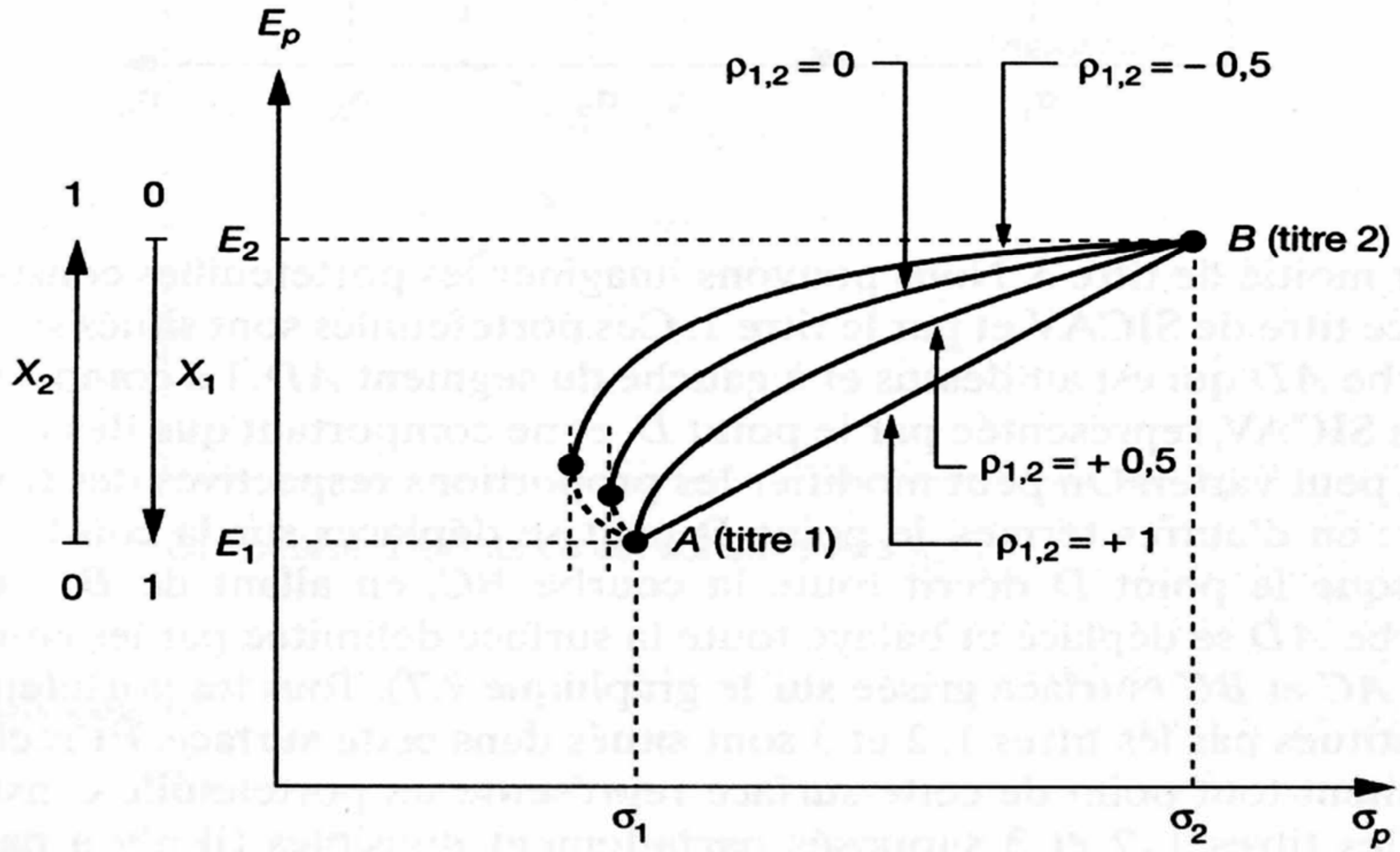
Graphique 2.6 – *Portefeuilles de 2 titres – Rôle du coefficient de corrélation $\rho_{1,2}$*



portefeuilles constitués de A et B

A et B comportant des quantités positives de titres Ils vérifient les contraintes sur les ventes à découvert

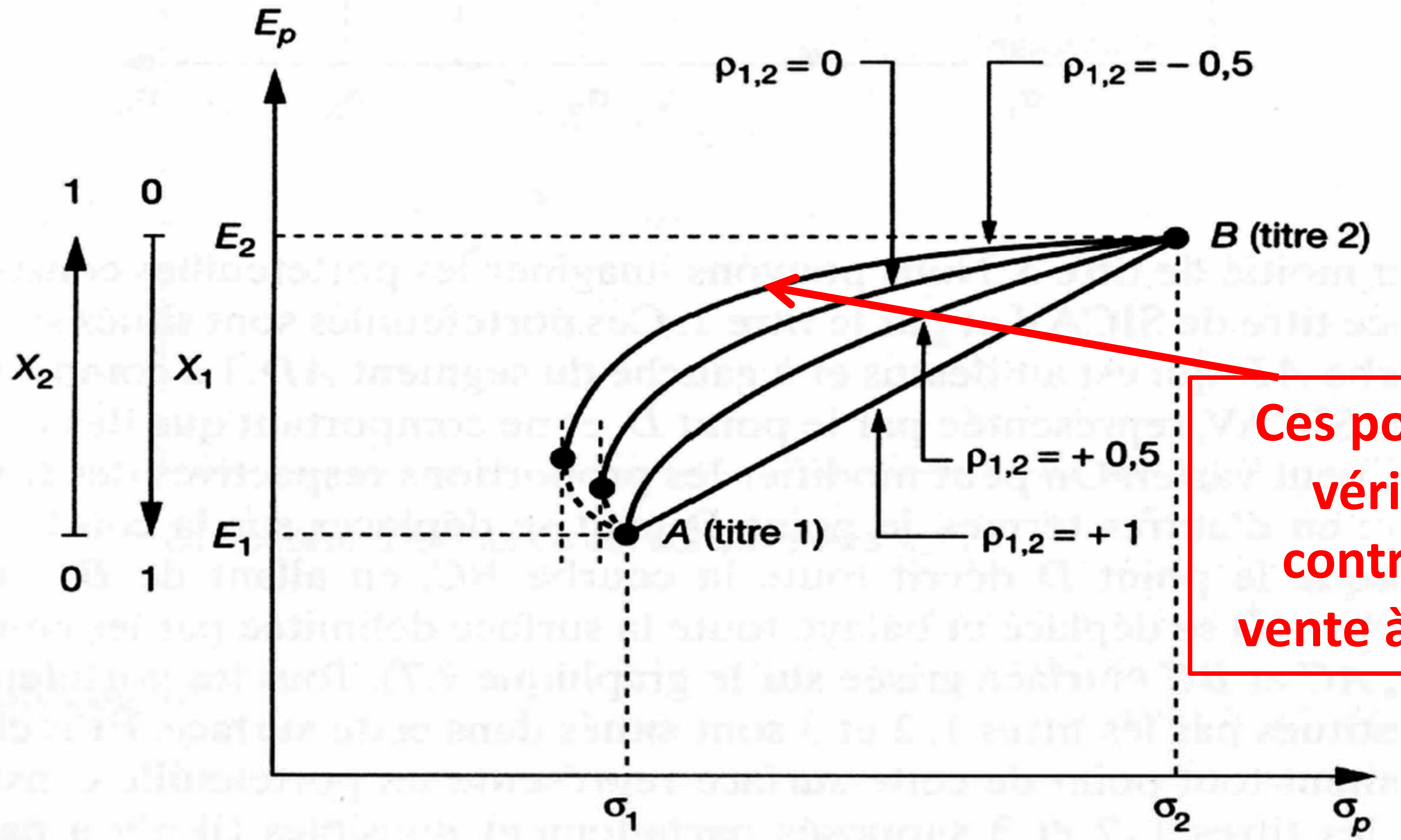
Graphique 2.6 – *Portefeuilles de 2 titres – Rôle du coefficient de corrélation $\rho_{1,2}$*



portefeuilles constitués de A et B

Une combinaison de A et B en quantités positives vérifie elle-même les contraintes sur les ventes à découvert

Graphique 2.6 – *Portefeuilles de 2 titres – Rôle du coefficient de corrélation* $\rho_{1,2}$

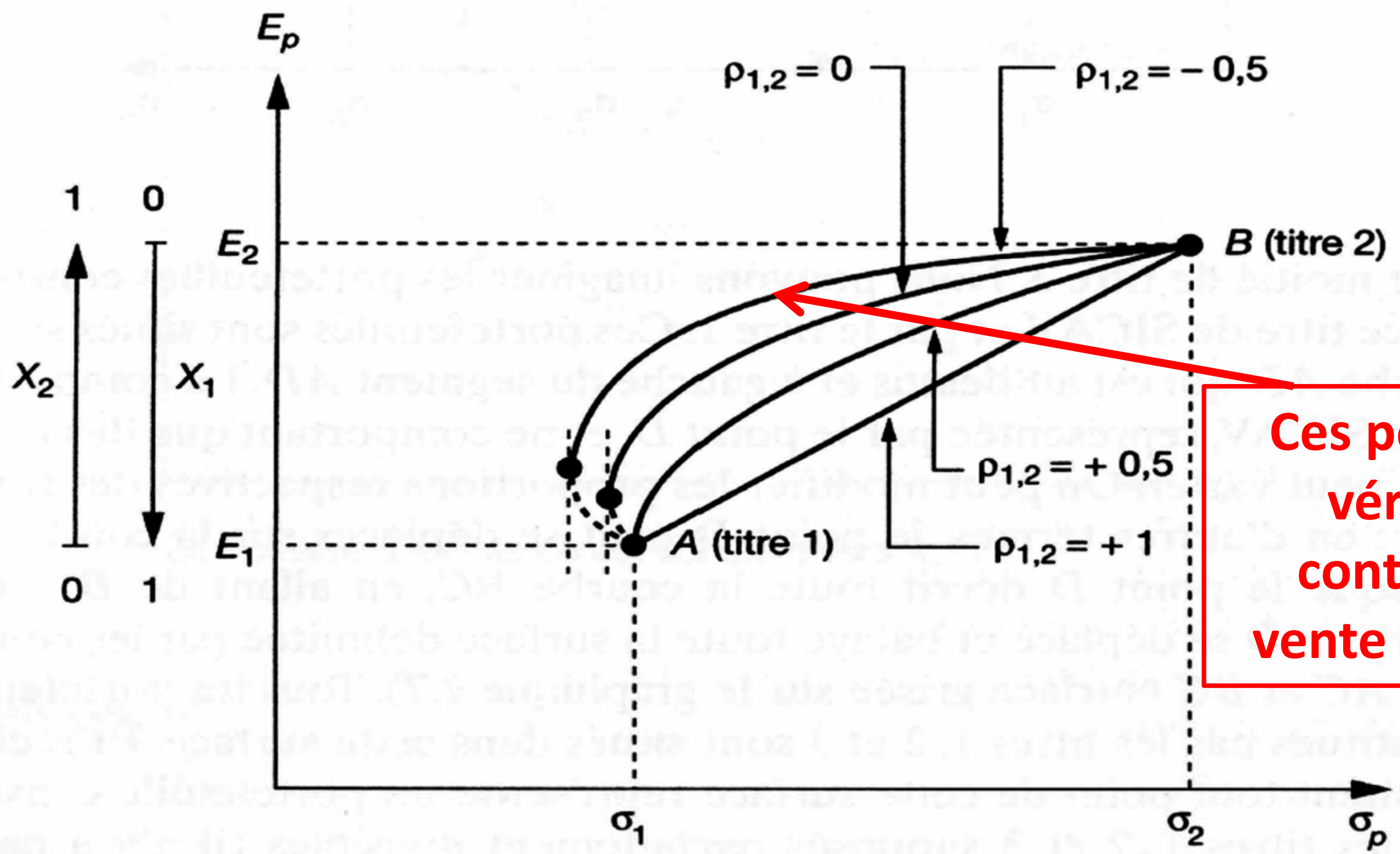


Ces portefeuilles vérifient les contraintes de vente à découvert

portefeuilles constitués de A et B

La frontière efficiente étant elle-même à gauche de l'ensemble des portefeuilles combinant A et B, elle est concave

Graphique 2.6 – *Portefeuilles de 2 titres –*
Rôle du coefficient de corrélation $\rho_{1,2}$



Ces portefeuilles vérifient les contraintes de vente à découvert

portefeuilles constitués de A et B

Frontière efficiente sans ventes à découvert

- Par souci de simplicité, nous avons supposé que l'interdiction de vente à découvert portait sur tous les titres $\boldsymbol{i = 1, \ldots, I}$
- Si elle ne porte que sur un sous-ensemble de titres $\boldsymbol{J} \subset \{\boldsymbol{1}, \ldots, \boldsymbol{I}\}$
  - *Actions de banques*
  - *Obligations d'États de la zone euro.*
  - *Il y a eu des interdictions temporaires au moment de la crise de liquidité puis de la crise des États de la zone euro*
- L'analyse précédente reste inchangée, la frontière efficiente des actifs risqués reste concave

Frontière efficiente sans ventes à découvert

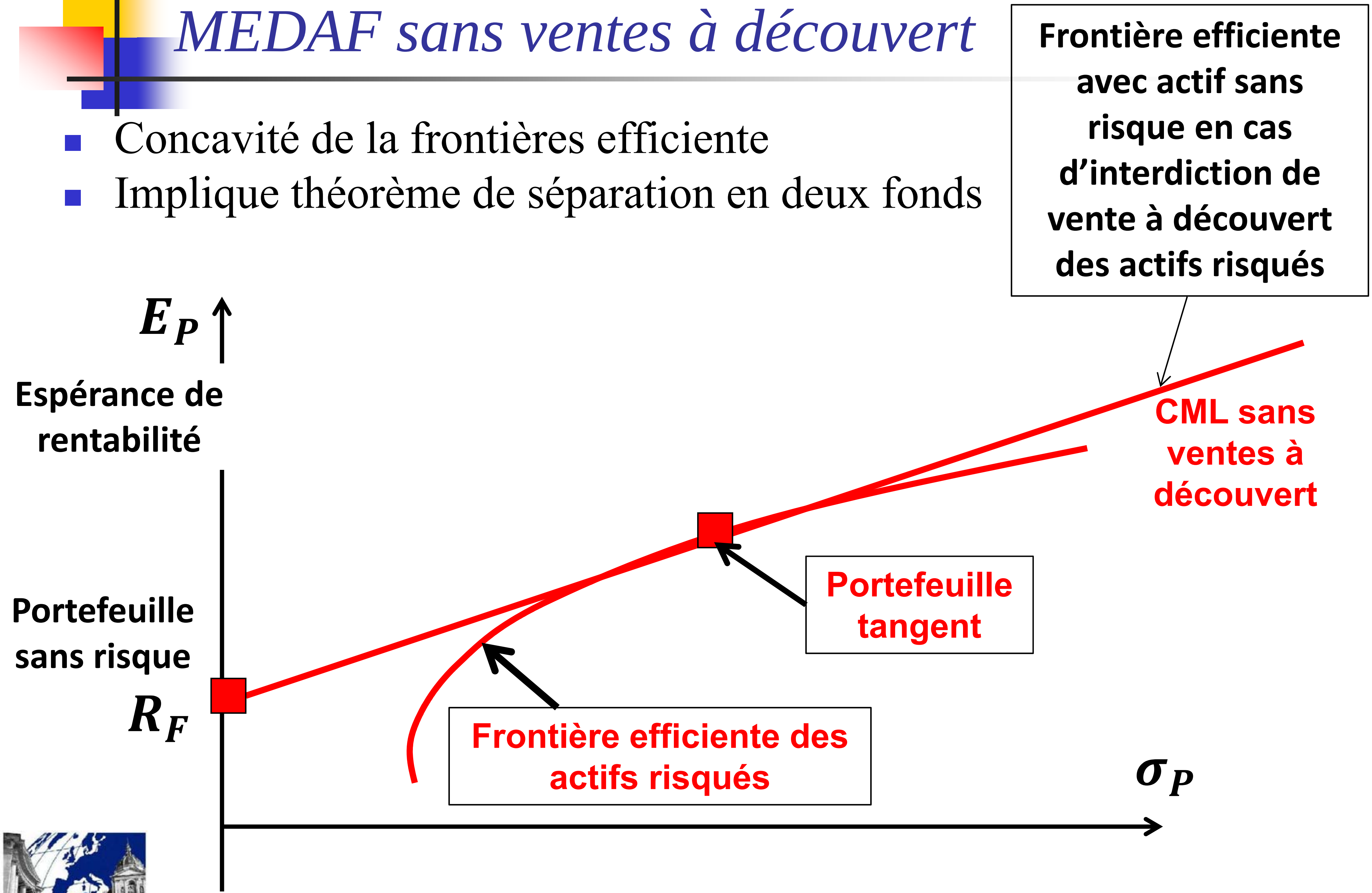
SHORT SALES

- Autres contraintes sur la composition des portefeuilles
  - *Nationalisation des banques : les investisseurs privés ne peuvent détenir les titres des sociétés nationalisées*
  - *Interdiction de détenir des titres de sociétés liées à certains États*
    - Sanctions financières
  - *Contraintes éthiques :Investissement Socialement Responsable*
  - *Ces titres* $\boldsymbol{i_1, i_2, \dots, i_J}$ *ne peuvent pas être détenus par les investisseurs*
    - $\boldsymbol{X(i_1) = 0, X(i_2) = 0, \dots, X(i_J) = 0}$
  - *Réduction de l'ensemble des opportunités d'investissement*
  - *La frontière efficiente des actifs risqués se déplace vers le bas*
  - *Mais reste concave*

– PANTHÉON - SORBONNE –
UNIVERSITÉ PARIS 1

MEDAF sans ventes à découvert

- Concavité de la frontières efficiente
- Implique théorème de séparation en deux fonds



MEDAF sans ventes à découvert

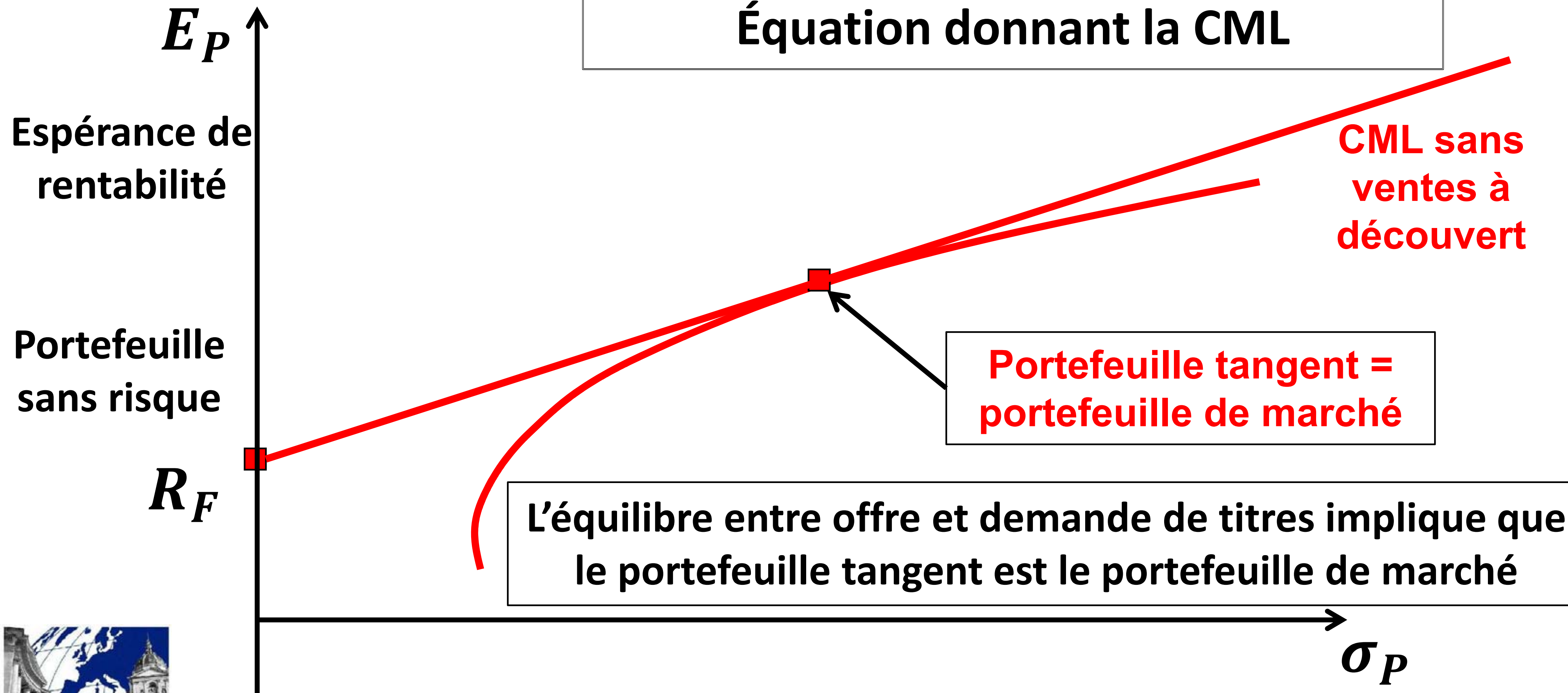
- Tous les investisseurs détiennent une combinaison d'actif sans risque et de portefeuille tangent
  - *Le portefeuille tangent vérifie la contrainte d'interdiction de vente à découvert*
- Équilibre entre offre et demande de titres
  - *Offre de titres : portefeuille de marché*
  - *Le portefeuille de marché satisfait les contraintes de vente à découvert*
    - Les entreprises n'émettent pas de quantités négatives d'actions…
  - *Le portefeuille tangent est donc égal au portefeuille de marché*
- Même résultat que pour le MEDAF non contraint

MEDAF sans ventes à découvert

La Capital Market Line est inchangée

$$E_P = R_F + \left(\frac{E_M - R_F}{\sigma_M}\right) \times \sigma_P$$

Équation donnant la CML

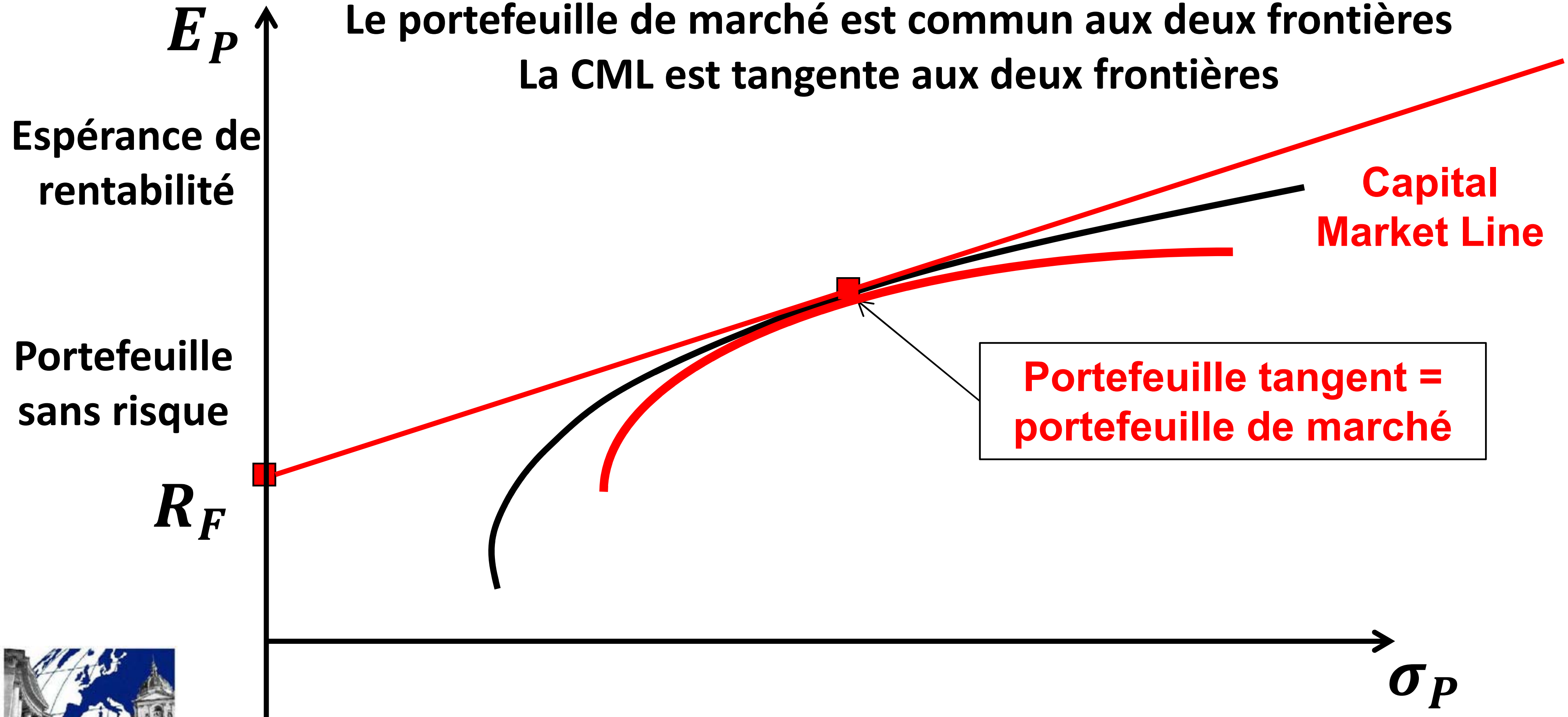


L'équilibre entre offre et demande de titres implique que le portefeuille tangent est le portefeuille de marché

MEDAF sans ventes à découvert

Frontières efficientes des actifs risqués avec et sans ventes à découvert (en noir et en rouge respectivement)

La frontière efficiente sans ventes à découvert est en dessous
Le portefeuille de marché est commun aux deux frontières
La CML est tangente aux deux frontières



MEDAF sans ventes à découvert

- Que devient la SML ?
  - *Démonstration presque identique au cas non contraint*
  - *Portefeuilles constitués du titre i et du portefeuille de marché*
  - *Écriture de la rentabilité*
  - $\boldsymbol{R(X) = XR_i + (1-X)R_M}$
  - *Il suffit de vérifier que ces portefeuilles respectent les contraintes d'interdiction de vente à découvert*
    - Démonstration donnée dans les transparents suivants
    - Et non traitée en amphi.
- La SML reste inchangée

MEDAF sans ventes à découvert

- Portefeuilles constitué d'un titre *i* et du portefeuille de marché
  - *Écriture de la rentabilité :* $\boldsymbol{R(X) = XR_i + (1-X)R_M}$
  - *Il suffit de vérifier que ces portefeuilles respectent les contraintes d'interdiction de vente à découvert*
  - *Le portefeuille de marché est associé à des quantités positives de titres* $\boldsymbol{X_1 > 0, \dots, X_i > 0, \dots, X_I > 0}$
  - *Pour* $\boldsymbol{0 \leq X \leq 1}$*, les portefeuilles sont associés à des quantités positives de titres :* $\boldsymbol{Y_1, \dots, Y_i, \dots, Y_I}$

$$Y_1 = (1-X)X_1 \geq 0, \ldots, Y_i = X + (1-X)X_i \geq 0, \ldots, Y_I = (1-X)X_I \geq 0$$

  - *Dans la démonstration du MEDAF, on a besoin de considérer des valeurs de* $\boldsymbol{X}$ *autour de* $\boldsymbol{0}$
    - Pour pouvoir dériver espérance et écart-type en $\boldsymbol{X = 0}$

MEDAF sans ventes à découvert

- Portefeuilles constitué d'un titre ***i*** et du portefeuille de marché

$$Y_1 = (1-X)X_1, \ldots, Y_i = X + (1-X)X_i, \ldots, Y_I = (1-X)X_I$$

  - *Il faut donc pouvoir considérer des valeurs de X négatives*
  - *Correspondant à des positions courtes dans le titre i*
  - $\boldsymbol{X < 0 \Rightarrow Y_k = (1-X)X_k > 0, k = 1, \ldots, I, k \neq i}$

$$Y_i = X + (1-X)X_i = \underbrace{X_i}_{>0} + X\underbrace{(1-X_i)}_{>0} > 0, \text{ si } X > -\frac{X_i}{1-X_i}$$

  - *On peut donc considérer un intervalle autour de* **0** *tel que si **X** reste dans cet intervalle, les portefeuilles constitués de titres **i**, dans une proportion **X** et de portefeuille de marché, dans une proportion* $\boldsymbol{1-X}$ *vérifient les contraintes de vente à découvert.*

– PANTHÉON - SORBONNE –
UNIVERSITÉ PARIS 1

MEDAF sans ventes à découvert

- Supposons que la réglementation interdise les ventes à découvert
  - *Pour la totalité des titres ou pour certains titres*
  - *La CML et la SML restent inchangées*
- le débat sur l'interdiction des ventes à découvert est non pertinent
  - *Puisque personne (dans notre modèle) ne souhaite détenir de quantités négatives de titres et spéculer à la baisse …*
  - *Ceci suppose que les lois de probabilités des rentabilités sont inchangées*
    - Par exemple, pas de modification de σ_i, ce qui est discutable.

Liens entre notation du cours et des TD (rappels)

- Quelques notations supplémentaires (poly. de TD)
  - $\boldsymbol{r_s = \left(E_M - R_f\right)/\sigma_M^2}$
  - *On peut écrire*
  - $\boldsymbol{E_i = R_f + \beta_i\left(E_M - R_f\right) = R_f + r_s Cov(R_i, R_M)}$
  - $\boldsymbol{E_M - R_f}$ *la pente de la SML quand les Betas sont en abscisse*
  - $\boldsymbol{r_s}$ *pente de la SML quand les covariances sont en abscisse*
  - $\boldsymbol{r_e = \left(E_M - R_f\right)/\sigma_M}$
  - $\boldsymbol{r_e}$ *ratio de Sharpe, pente de la CML*
  - $\boldsymbol{E_i = R_f + r_e \times (\beta_i \sigma_M)}$