Chapitre 7 : Les rendements d'échelle

La notion de rendement d'échelle (RE) à partir d'un exemple

Exemple d'une voiture équipée d'un ordinateur de bord qui calcule le tps nécessaire pr parcourir un certain nb de km

On va noter : * *q* la prod° => ici, les km parcourus
* *t* la durée

(Mais le pb de cet exemple est qu'il n'y a qu'un seul facteur de production)

Pr obtenir le rendement : q / t => vitesse moyenne

Si par exemple, on a q=150km parcourus en t= 1h30 on obtient vitesse moyenne = 100km/h

Pour savoir à que moment il est le + stratégique de s'arrêter, on compare la vitesse instantannée à la vitesse moyenne.

En effet, s'il y a un ralentissement, et que la vitesse instantannée ($\Delta q / \Delta t$) n'est que de 50km/h, Vitesse instantannée < vitesse moyenne. Il est dc stratégique de faire une halte.

Transposition de cet exemple à une entreprise : qd Pm < PM, on arrête de produire.

Donc, on a $(\Delta q / \Delta t) < (q / t) \Leftrightarrow (\Delta q / q) < (\Delta t / t)$

Ici on est ds le cas de rendements d'échelle décroissants, dc on tends vers l'arrêt de la production

Remarque : $(\Delta q / q)$ correspond à l'accroissement relatif de la prod° (accroissement absolu de la prod° divisé par la prod° réalisée)

=> Même phrase pr *t* , qui est ici considéré comme un facteur de production

D Rendement d'échelle : Ils mesurent l'accroissement de la production qd on aug simultanément et ds une même proportion, tous les facteurs de production

Exemple : Si on aug ts les facteurs de 10%, à quelle condition est-on prêt à produire d'avantage ?

- ⇨ On compare l'acccroissement de ts les facteurs à l'accroissement de la production

On doit envisager 3 situations :

1- Variation de la prod° > 10% : Rendements d'échelle croissants
2- Variation de la prod° = 10% : RE constants
3- Variation de la prod° < 10% : RE décroissants

➔ Il est intéressant de produire + ds les cas 1 et 2 (aug de la prod° > aug des facteurs)

PLAN : I. Comment montrer mathématiquement les RE que présente une fct de prod°
II. Lien entre RE et CM
III. Lien entre RE et économie d'échelle

I. Le calcul des rendements d'échelle

On prend une fct de prod° à 2 facteurs : K et L. D'après la définition éco, on parle de RE lors de l'aug simultanée de ts les facteurs de prod° ds une même proportion, donc on va noter cela :

$F(\lambda K, \lambda L)$ => On multiplie simultanément les 2 facteurs par λ (*ac* $\lambda > 1$)

➔ On va comparer $F(\lambda K, \lambda L)$ à $\lambda F(K, L)$ pr savoir si les RE st constants, croisst ou décroisst

<u>Exemple d'application</u> : Si on aug simultanément les 2 facteurs de 10%, on va comparer *F (1,1 K ; 1,1 L)*, qui nous donne l'accroissement réel de la production à une hausse de la prod° totale réalisée de 10%, notée 1,1 F(K, L), qui représente la norme (ici 10%) :

* <u>Cas 1</u> : $F(\lambda K , \lambda L) = \lambda F (K,L)$ => Les RE st constants (on aug nos facteurs de 10% et la prod° aug aussi de 10%)

* <u>Cas 2</u> : $F(\lambda K , \lambda L) < \lambda F (K,L)$ => Les RE st décroissants (l'accroissement réel de la prod° dû à une aug des facteurs de 10% est inférieure à 10%)

* <u>Cas 3</u> : $F(\lambda K , \lambda L) > \lambda F (K,L)$ => Les RE st croissants (l'accroissement réel de la prod° dû à une aug des facteurs de 10% est supérieur à 10%)

EXERCICES D'APPLICATION

1) $F (K,L) = KL + K^2 + L^2$

Déterminer les RE : Que se passe-t-il si on double les facteurs de production ?

2) $F (K,L) = K^2 L + K L^2$

3) $F (K , L) = (K – 8)^{1/3} L^{1/3}$

1) <u>Si on double les facteurs de production :</u>

$F (2K, 2L) = 2K\,2L + 4K^2 + 4L^2 = 4 (KL + K^2 + L^2) = 4 (F (K,L))$

Et $2 F(K,L) = 2(KL + K^2 + L^2) = 2 (F (K,L))$

➔ $F(2K, 2L) > 2 F(K,L)$, c'est-à-dire que si on double les facteurs de prod° on aura des RE croissants

<u>Cas général :</u>

$F (\lambda K, \lambda L) = \lambda K \lambda L + \lambda^2 K^2 + \lambda^2 L^2 = \lambda^2 (KL + K^2 + L^2) = \lambda^2 (F (K,L))$

On a dc obtenu ***$\lambda \times \lambda F (K,L)$*** et puisque $\lambda > 1$, $F (\lambda K, \lambda L) > \lambda F (K,L)$ et les RE st croissants

2) <u>Cas général</u> :

$F (\lambda K, \lambda L) = \lambda^2 K^2 \lambda L + \lambda K \lambda^2 L^2 = \lambda^3 (K^2 L + K L^2) = \lambda^3 (F (K,L))$

On a dc obtenu ***$\lambda^2 \times \lambda F (K,L)$*** et puisque $\lambda > 1$, $F (\lambda K, \lambda L) > \lambda F (K,L)$ et les RE st croissants

3) <u>Cas général</u> :

$$\begin{aligned} F (\lambda K, \lambda L) &= (\lambda K - 8)^{1/3} (\lambda L)^{1/3} \\ &= \lambda^{1/3} (K - (8/ \lambda))^{1/3} (\lambda^{1/3} L^{1/3}) \\ &= \lambda^{2/3} (K - (8/ \lambda))^{1/3} (L^{1/3}) \end{aligned}$$

On veut pouvoir comparer facilement le résultat de $F (\lambda K, \lambda L)$ à $\lambda F (K,L)$ mais ici $(8/ \lambda)$ pose pb. Il faut donc écrire $\lambda F (K,L)$ et comparer membre à membre :

$$\begin{array}{cccc} F (\lambda K, \lambda L) = & \lambda^{2/3} & (K - (8/ \lambda))^{1/3} & (L^{1/3}) \\ & < \downarrow & < \downarrow & = \downarrow \\ \lambda F (K,L) = & \lambda & (K - 8)^{1/3} & (L^{1/3}) \end{array}$$

En effet, puisque $\lambda > 1$, on a bien, $8 > 8 / \lambda$ mais on aura **$(K - (8/ \lambda))^{1/3} > (K – 8)^{1/3}$** car ds le 1er cas on soustrait une valeur + petite à K dc le résultat sera + grd.

On est dc face à un cas indéterminé car on a < et > , dc on ne peut pas conclure.

Qu'aurait-il fallu modifier pr avoir une solution possible ?

On aurait pu modifier 2 choses :

* Avoir un exposant > à 1, dc chaque exposant des 2 λ de départ doit être > à ½ => RE croissants
* Si on écrit $(K + 8)^{1/3}$, on aura $(K - (8/\lambda))^{1/3} < (K + 8)^{1/3}$ => RE décroissants car tt est <

<u>Spécificité de la fonction Cobb-Douglass</u>

Fct du type $F(K, L) = A(K^{\alpha} L^{\beta})$ où $A > 0$ $(\alpha, \beta) \in R^{2+}$

<u>**Q** | Calculer les RE</u>

- $F(\lambda K, \lambda L) = A(\lambda K)^{\alpha} (\lambda L)^{\beta}$
  $= A \lambda^{(\alpha + \beta)} K^{\alpha} L^{\beta}$
- $\lambda F(K,L) = A \lambda K^{\alpha} L^{\beta}$

On peut en déduire 3 cas (étude des RE en étudiant la somme des coefficients) :

* $\alpha + \beta > 1$ => $F(\lambda K, \lambda L) > \lambda F(K,L)$ et les RE st croissants
* $\alpha + \beta = 1$ => $F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K,L)$ et les RE st constants
* $\alpha + \beta < 1$ => $F(\lambda K, \lambda L) < \lambda F(K,L)$ et les RE st décroissants

<u>II. Lien entre les rendements d'échelle et le coût moyen</u>

Quand les RE st décroissants, on a un CM croissant car :

Qd Cm > CM, CM est croissant ce qui implique que les RE st décroissants

<u>Mathématiquement</u>

Prenons une fct de production $Q = F(K,L)$ sachant que le coût total associé à cette production correspond à $CT = rK + wL$.

$$CM = (rK + wL) / F(K,L)$$

Puisqu'on s'intéresse aux RE, on écrit : $F(\lambda K, \lambda L)$ et $CT = r \lambda K + w \lambda L$.

Faisons une hypothèse : Supposons que les RE st décroissants.

Cela implique que $F(\lambda K, \lambda L) < \lambda F(K,L) \Leftrightarrow \lambda' F(K,L) < \lambda F(K,L)$

On écrit le 1er terme ss cette forme car on veut rendre l'aug de la production proportionnelle à F (K,L)

On peut en déduire que $\lambda' < \lambda$

On va dc réécrire le CM avec le 1er terme ss sa nouvelle forme :

$$CM' = (\lambda [rK + wL]) / F(\lambda K, \lambda L) = (\lambda [rK + wL]) / \lambda' F(K,L)$$

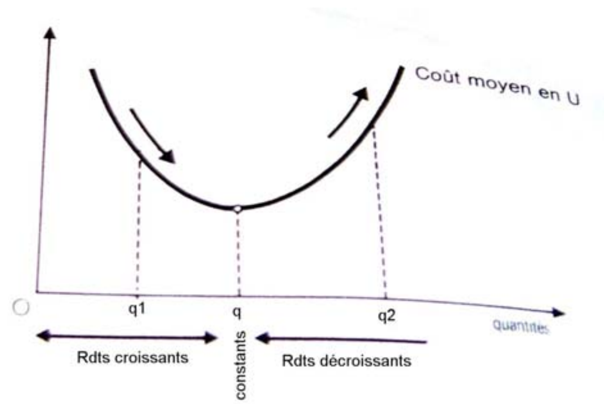
Dans ces expressions, on a aug la qté de facteurs de prod° utilisés.

On veut comparer CM et CM' : CM' > CM

En effet, en augmentant la qté de facteurs utilisés, on aug le CM. Et dc, qd les RE st décroissants, le CM est croissant.

<u>Récapitulatif :</u>

Cm > CM => CM croissants et RE décroissants
CM = CM => CM constants et RE constants
Cm < CM => CM décroissants et RE croissants



III. Existe-t-il une similitude entre RE et économie d'échelle ?

Qd on parle de RE, on a ds la fct de prod° du K et du L, Qd on a du K, on est à court terme.
> RE = notion de court terme => On s'intéresse à l'accroissement des fcts de prod.
On est plutôt ds une meilleure spécialisation du L => quelle technologie va-t-on utiliser.

> Economie d'échelle : notion de long terme. qd le CM décroît on fait des éco d'échelle
Plutôt un pb de management

Lien entre les 2 : - RE croissant amène CM décroissant
- faire des éco d'échelle amène CM décroissant
Mais cette baisse n'est pas du aux même facteurs…

EXERCICE 14

1) Déterminer et justifier la nature des RE de l'exercice 11

$F(K,L) = (K - 8)^{1/6} (L)^{1/6}$

* $F(\lambda K, \lambda L) = (\lambda K - 8)^{1/6} (\lambda L)^{1/6}$
$= \lambda^{2/6} (K - (8/\lambda))^{1/6} (L)^{1/6}$
* $\lambda F(K, L) = \lambda (K - 8)^{1/6} (L)^{1/6}$

⇨ Membre à membre : $\lambda^{2/6} < \lambda$ $(K - (8/\lambda))^{1/6} > (K - 8)^{1/6}$ $(L)^{1/6} = (L)^{1/6}$
Donc le cas est indéterminé.

2) Déterminer et justifier la nature des RE à court terme (les 5 machines étant donné) de l'exercice 12

Puisqu'on utilise en 1er les machines les + productives, les RE st décroissants.